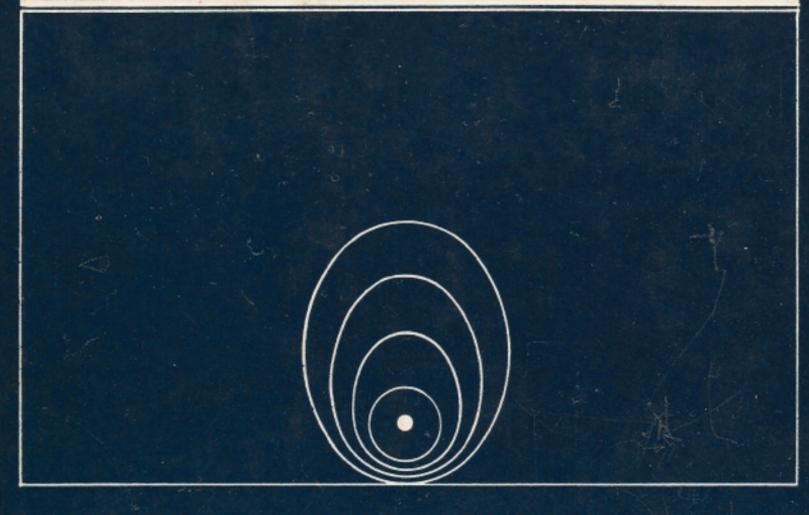
N. B. Vasíliev, V. L. Gutenmájer

RECTAS Y CURVAS



Editorial
MIR


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Н. Васильев,
В. Гутенмахер

Прямые и кривые

Издательство «Наука»
Москва

N. B. Vasíliev,
V. L. Gutenmájer

Rectas y curvas

Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por
Margarita Gómez

На испанском языке

Impreso en la URSS. 1980

Indice

Prólogo

Los principales personajes de este libro son diferentes figuras geométricas, o, como a menudo se denominan, «conjuntos de puntos». Al principio aparecen las figuras mas simples en distintas combinaciones. Estas se mueven, revelan distintas propiedades, se cortan, se unen, forman diferentes familias y cambian su aspecto, hasta llegar a veces a hacerse desconocidas; por otra parte, es interesante ver a viejos conocidos en una situación compleja, rodeados de figuras nuevas, que aparecen al final.

El libro contiene alrededor de doscientos problemas, muchos de los cuales se ofrecen con comentarios o se dan sus soluciones. Los problemas son muy diversos, desde tradicionales, en los que hay que hallar y emplear de alguna forma uno u otro conjunto de puntos, hasta pequeñas investigaciones. que conllevan a importantes conceptos y teorías matemáticas (así son los problemas «sobre el queso», «acerca de la lancha motora» y «en torno al autobús»). Además de teoremas geométricos comunes sobre rectas, circunferencias y triángulos, en el libro se emplean el método de coordenadas, los vectores, las transformaciones geométricas y, sobre todo, el lenguaje del movimiento. Una enumeración de datos geométricos y fórmulas útiles vienen en los apéndices I y II. Algunas sutilezas lógicas, que surgen en las soluciones, se dejan para que el lector reflexione. El signo (?) substituye las palabras «ejercicio», «compruebe» «¿es

evidente para usted esta afirmación?», «piense por qué», etc., en dependencia del lugar donde esté. Con el signo □ se señala el comienzo y el final de la solución, y ↓ indica que la solución del problema o la respuesta al mismo se encuentra al final del libro. Los problemas más difíciles de resolver vienen señalados con asterisco.

Los problemas que inician cada parágrafo no son, en general, difíciles, o están analizados detalladamente en el texto. Los demás problemas no es obligatorio resolverlos seguidamente, uno tras otro, al leer el libro, se puede elegir aquellos que a juicio de uno, son los más sugestivos. Muchas cosas, sobre las que se habla en los problemas, es útil comprobarlas en la práctica: hacer un dibujo grande, mejor unas cuantas variantes (situando las figuras en diversas disposiciones). Semejante método experimental, además de que ayuda a adivinar la respuesta, y a formular una hipótesis, sugiere a menudo el camino hacia la demostración matemática. Haciendo dibujos en el margen, los autores se han convencido, de que tras casi cada problema está encerrado un problema auxiliar: trazar unos cuantos puntos o líneas, sobre las que se habla en la tarea. Este problema preliminar resulta con frecuencia más fácil, pero no menos interesante.

En particular estimamos necesario incluir en el libro el apéndice III, el que ayudará a utilizar la obra para un estudio sistemático, dará la posibilidad de descubrir los vínculos, que enlazan problemas de diferentes capítulos, ocultos a primera vista.

N. Vasíliev, V. Gutenmájer

Notaciones

$AB = \rho(A, B)$ — longitud del segmento AB (distancia de A a B).

$\rho(A, l)$ — distancia desde el punto A hasta la recta l.

$\widehat{ABC}$ — magnitud del ángulo ABC (en grados o radianes).

$\overset{\frown}{AB}$ — arco de una circunferencia con extremos en A y B.

ΔABC — triángulo ABC

S_{ABC} — área del triángulo ABC.

$\{M : f(M) = c\}$— conjunto de todos puntos M que satisfacen la condición $f(M) = c$.

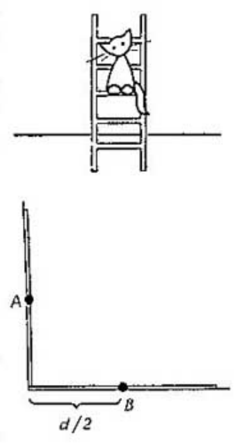
Introducción

Problemas iniciales

0.1. Una escalera situada sobre el suelo liso y apoyada con un extremo en la pared, se desliza hacia abajo. ¿Por qué línea se mueve un gatito sentado en el centro de la escalera?

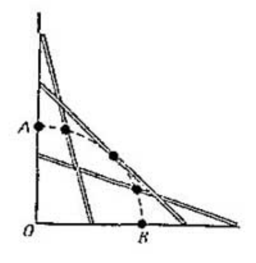
Supongamos, que el gatito es flegmático y está sentado tranquilamente. Entonces, tras está formulación convencional, se entrevé el siguiente problema matemático.

Sea un ángulo recto. Hallar el conjunto de centros de toda clase de segmentos de una longitud dada d, cuyos extremos se hallan sobre los lados del ángulo dado.



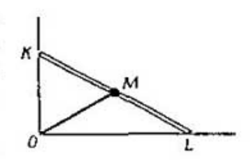
Tratemos de adivinar cuál es el conjunto. Claro está, cuando el segmento gira, deslizándose con los extremos por los lados del ángulo, su centro describe cierta línea (esto lo sugiere también la primera formulación del problema). Ante todo, vamos a aclarar dónde están los extremos de esta línea. Corresponden a las posi-

ciones extremas del segmento, que éste ocupa cuando se halla o vertical o horizontalmente. O sea significa, que los extremos de la línea A y B están en los lados del ángulo, a la distancia de $d/2$ respecto a su vértice.

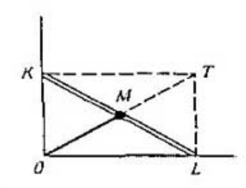


Trace unos cuantos puntos intermedios de esta línea. Si lo hace con suficiente exactitud, verá que todos ellos están a igual distancia del vértice O del ángulo dado.

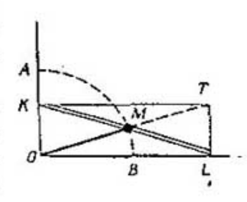
Surge una **suposición**: la línea buscada es el arco de una circunferencia cuyo radio es $d/2$,y el centro se encuentra en el vértice O. Ahora hace falta **demostrarlo.**



□ Demostremos primero que el centro M del segmento dado KL ($|KL| = d$) siempre está a la distancia de $d/2$ del punto O. Esto se deduce del hecho de que la longitud de la mediana OM del triángulo rectángulo KOL es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa. (En la justedad de esto es fácil convencerse si a partir del triángulo KOL trazamos el rectángulo $KOLT$ y si recordamos que sus diagonales KL y OT son de una misma longitud y se dividen por la mitad en el punto de intersección M).

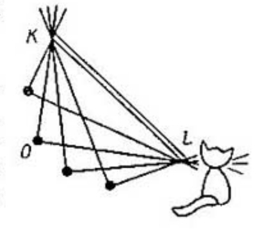


De esta forma, hemos demostrado que el centro del segmento KL siempre está en el arco AB de la circunferencia con el centro O. Este arco es el conjunto de puntos que se busca.



Hablando en rigor, aún tenemos que demostrar que cualquier punto M del arco $\overset{\frown}{AB}$ pertenece al conjunto buscado. Esto no resulta difícil de hacer. En realidad, a través de cualquier punto M de nuestro arco podemos trazar un rayo OM, luego trazar sobre él el segmento $|MT| = |OM|$ y bajar desde el punto T las perpendiculares TL y TK a los lados del ángulo. Así obtenemos el segmento necesario KL con el centro en el punto M. □

La segunda mitad de la demostración podría parecer innecesaria, pues es claro que el centro del segmento KL describe una «línea continua» con los extremos A y B, o sea, que el punto M pasa por todo el arco AB, y no sólo por alguna de sus partes. Este razonamiento es completamente convincente, pero no es tan fácil darle rigor matemático.

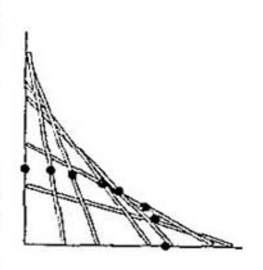


Veamos ahora desde otro punto de vista el movimiento de la escalera en el problema 0.1. Supongamos que el segmento KL («escalera») está fijado y las rectas KO y LO («pared» y «suelo») giran respectivamente alrededor de los puntos K y L de forma que el ángulo entre ellas es siempre recto. El hecho de que la distancia desde el centro del segmento hasta el vértice O del ángulo recto sea siempre la misma, se transforma en un teorema conocido: *si en un plano se dan dos puntos, K y L, entonces el conjunto de*

puntos O, para los cuales $\widehat{KOL} = 90^\circ$, resulta ser una circunferencia de diámetro KL. Este teorema, al igual que su generalización, que les ofrecemos en el punto E § 2, servirán reiteradamente para la solución de problemas.

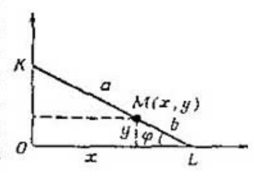
Volvamos a los datos del problema 0.1 y formulemos la pregunta más ampliamente.

0.2. ¿Por qué línea se moverá el gatito, si no está sentado en el centro de la escalera?



En la figura están dibujados unos cuantos puntos de una de estas líneas. Puede verse, que no es una recta, ni una circunferencia, sino una curva nueva para nosotros. Aclarar qué curva es, nos ayudará el método de coordenadas.

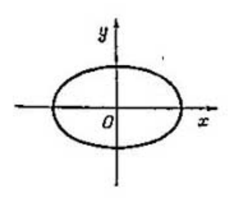
☐ Establezcamos un sistema de coordenadas, tomando por ejes Ox y Oy los lados del ángulo. Supongamos que el gatito está sentado en el punto $M(x; y)$, a distancias a y b de los respectivos extremos K y L de la escalera $(a + b = d)$. Hallemos la ecuación que vincula las coordenadas x e y del punto M.



Si el segmento KL está inclinado en un ángulo φ respecto al eje Ox, entonces $y = b$ sen φ, y $x = a \cos \varphi$; por esto, con cualquier φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$

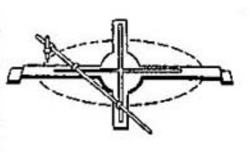
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

El conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuación, es una *elipse*, como veremos en el § 6. De esta manera, el gatito se moverá por una elipse. □



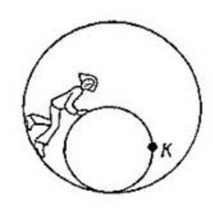
Obsérvese que si $a = b = d/2$, o sea cuando el gatito está sentado como antes, en el centro de la escalera, la ecuación (1) se transforma en la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = (d/2)^2$. Así pues, obtenemos otra solución analítica del problema 0.1.

El resultado del problema 0.2 explica cómo funciona el mecanismo que traza elipses. Este mecanismo, representado en el dibujo, se llama *elipsógrafo* de Leonardo de Vinci.

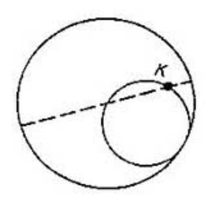


Teorema de Copérnico

0.3. Por el interior de una circunferencia inmóvil rueda tocándola sin deslizar otra circunferencia cuyo radio es dos veces menor que el de la primera. ¿Qué línea describirá el punto K de la circunferencia rodante?



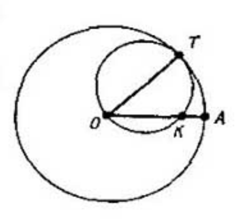
La respuesta a este problema es asombrosamente simple: el punto K se mueve por línea recta, más exactamente, por el diámetro de la circunferencia inmóvil. Este resultado es el que se llama *teorema de Copérnico.*

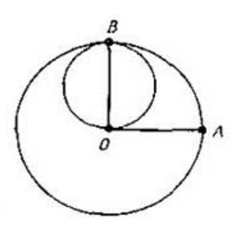


Trate de convencerse en la práctica de la exactitud de este teorema. (Es de suma importancia que la circunferencia interior rueda sin desli-

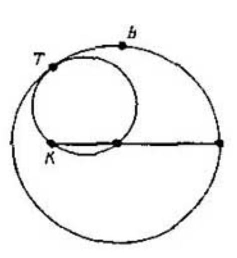
zamiento, o sea, que las longitudes de los arcos que giran uno sobre otro sean iguales.) No es difícil demostrarlo, solamente hace falta acordarse del teorema sobre el valor del ángulo inscrito.

□ Supongamos que el punto de la circunferencia rodante, que en el primer momento ocupaba la posición A en la circunferencia inmóvil, ha llegado a la posición K, mientras que T es el punto de contacto de las circunferencias en este momento. Como las longitudes de los arcos $\overset{\frown}{KT}$ y $\overset{\frown}{AT}$ son iguales, y el radio de la circunferencia rodante es dos veces menor, resulta que el valor en grados del arco $\overset{\frown}{KT}$ es dos veces mayor que el del arco $\overset{\frown}{AT}$. De esta manera, si O es el centro de la circunferencia inmóvil, según el teorema del ángulo inscrito (véase § 1 pág. 26) $\widehat{AOT} = \widehat{KOT}$. O sea, que el punto K está sobre el radio AO.

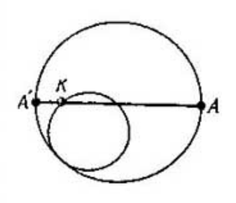




Este razonamiento es válido hasta el momento en que la circunferencia móvil ruede por la cuarta parte de la circunferencia grande (el punto de contacto estará en el punto B de esta última para la cual $\widehat{BOA} = 90°$, y K coincidirá con O). A continuación el movimiento transcurrirá del mismo modo exactamente — todo el cuadro se reflejará simétricamente respecto

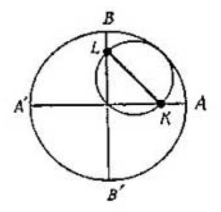


a la recta BO — y, luego de que el punto K llegue al extremo opuesto A' del diámetro AA', la circunferencia rodará por la mitad inferior de la circunferencia inmóvil, y en este tiempo el punto K volverá a A. □



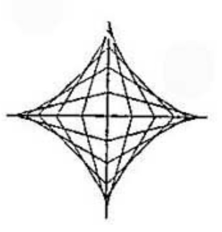
Comparemos los resultados de los problemas 0.1 y 0.3. Su atractivo estriba, por lo visto, en la siguiente circunstancia. En los dos problemas se trata de un movimiento bastante complicado de la figura (en el primero, sobre el movimiento de un segmento; en el segundo, sobre el de una circunferencia). Pero las trayectorias de algunos puntos resultan inesperadamente sencillas. ¡Además de que estos dos problemas se parecen exteriormente, los movimientos estudiados en ellos coinciden!

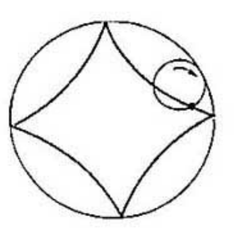
En efecto, supongamos, que por el interior de una circunferencia de radio d rueda otra circunferencia de radio $d/2$ y que KL es el diámetro de esta última, unido a ella rígidamente. De acuerdo con el teorema de Copérnico, los puntos K y L se trasladan por rectas inmóviles (diámetros de la circunferencia grande, AA' y BB', correspondientemente). De esta forma, el diámetro KL se desliza con sus extremos por dos rectas mutuamente perpendiculares, o sea, que se mueve como el segmento en el problema 0.1.



Otra cuestión interesante, relacionada con el movimiento del segmento

KL: ¿qué conjunto de puntos cubre este segmento, es decir, cuál es la reunión de todas las situaciones posibles del segmento KL durante su movimiento? La curva que limita este conjunto se llama *astroide*. Resulta que puede obtenerse de la forma siguiente: si a una circunferencia de diámetro $d/2$ se le hace rodar dentro de una circunferencia de diámetro $2d$, entonces dibujando la trayectoria de algún punto concreto de la circunferencia rodante se obtendrá una trayectoria que será justamente una astroide. Sobre esta curva y sus familiares más cercanos hablaremos en el § 7, el último de nuestro libro, donde el lector podrá conocer más detalladamente la interconexión de las cuestiones que hemos tratado.





Sin embargo, antes de estudiar estas sutiles cuestiones y curvas, nos detendremos minuciosamente en los problemas relacionados con rectas y circunferencias. Durante los primeros cinco capítulos no aparecerán otras líneas.

I Conjunto de puntos

En el presente parágrafo vamos a examinar e ilustrar, mediante una serie de ejemplos, los planteamientos fundamentales de los problemas que componen el libro, y también el arsenal de conceptos y medios que se utilizan para resolverlos. Concluye este capítulo una gran diversidad de problemas geométricos.

Examinemos primero el término que se encuentra más a menudo en el libro y que sirve como título del capítulo.

«Conjunto de puntos» es un concepto muy general. Puede ser cualquier figura: uno o muchos puntos, una línea o un dominio en la superficie plana.

En muchos problemas de nuestro libro hay que *hallar un conjunto de puntos* que satisfagan a cierta condición. Las respuestas en estos problemas son, por regla general, figuras conocidas del curso de geometría es-

colar (rectas, circunferencias, a veces trozos en los que estas líneas dividen la superficie plana, etc.). Lo principal es adivinar qué figura es. Así, en el problema 0.1 sobre el gato nosotros adivinamos que la respuesta era una circunferencia, y en el problema 0.3 la respuesta resultó ser una recta.



Al resolver algunos problemas hay que realizar toda una investigación, ya que es necesario convencerse de que:

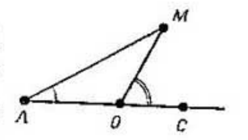
a) *todos los puntos, que satisfacen a dada condición, pertenecen a la figura indicada*;

b) *todos los puntos de la figura satisfacen a dada condición.*

A veces son evidentes las dos afirmaciones, tanto la directa como la inversa; a veces solamente una de ellas; pero en ocasiones es difícil hasta siquiera imaginarse cuál será la respuesta.

Analicemos unos cuantos problemas típicos.

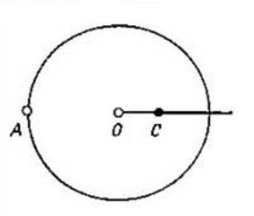
1.1. El punto O está situado en el segmento AC. Hallar el conjunto de puntos para los cuales $\widehat{MOC} = 2\widehat{MAC}$



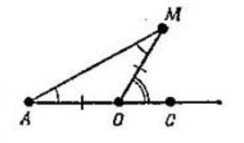
□ *Respuesta.* El lugar geométrico de una circunferencia de radio $|AO|$ con centro en O (sin el punto A) y del rayo OC (sin el punto O).

Vamos a convencernos de esto. Supongamos que el punto M del conjunto buscado no pertenece a la recta

AO. Demostremos que la distancia $|MO|$ desde aquél hasta el punto O es igual a $|AO|$. Tracemos el triángulo OAM. Según el teorema del ángulo exterior del triángulo, la magnitud del ángulo MOC es igual a la suma de las magnitudes de los ángulos interiores A y M, no adyacentes a él, o sea

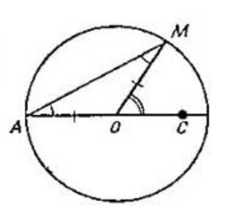


$$\widehat{OAM} + \widehat{AMO} = \widehat{MOC} = 2\widehat{MAO}.$$



A partir de los datos del problema obtenemos en seguida $\widehat{OAM} = \widehat{AMO}$; por consiguiente, el triángulo AMO es isósceles, o sea, $|OM| = |AO|$.

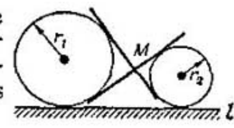
Demostremos, que es justo también lo contrario: cualquier punto M de la circunferencia señalada en la respuesta satisface a la condición. En efecto, el triángulo AMO es isoscéles, sus ángulos A y M son iguales y, por el mismo teorema del ángulo exterior, $\widehat{MOC} = 2MAC$.



Sea que ahora el punto M pertenece al rayo OC, $M \neq 0$. Entonces $\widehat{MOC} = 2\widehat{MAC} = 0$, y la condición se ha cumplido.

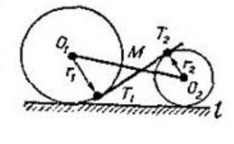
Los demás puntos de la recta AO no pertenecen al conjunto buscado: para ellos, uno de los ángulos MOC y MAC es desarrollado, y el otro es cero (sobre el punto O no se puede decir nada).

1.2. Dos ruedas de radios r_1 y r_2 ($r_1 > r_2$) ruedan por la recta l. Hallar el conjunto de puntos de intersección M de sus tangentes comunes interiores (véase el dibujo).

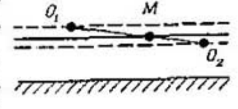


□ *Respuesta.* Una recta paralela a l.

Observemos que el punto M se encuentra sobre el eje de simetría de estas dos circunferencias, es decir, en la recta O_1O_2, donde O_1 y O_2 son los centros de las mismas. Por esto se puede encontrar el conjunto de puntos de intersección de la recta O_1O_2 y una de las tangentes T_1T_2.



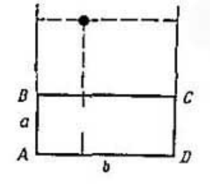
Examinemos una posición arbitraria de las dos circunferencias y tracemos a los puntos de tangencia sus radios O_1T_1 y O_2T_2. Vemos, que el punto M divide el segmento O_1O_2 en la relación r_1/r_2 (los triángulos rectángulos MO_1T_1 y MO_2T_2 son semejantes). Es claro que el conjunto de centros O_1 y el conjunto de centros O_2 son rectas paralelas a la recta l. El conjunto de puntos M, que dividen los segmentos O_1O_2, cuyos extremos se sitúan en dichas rectas, en la misma relación r_1/r_2, también representan en sí una recta paralela a l.



De esta manera, el conjunto de puntos de intersección de las tangentes es una recta paralela a la recta l y se encuentra a la distancia $2r_1r_2/(r_1 + r_2)$ de esta recta (?). □

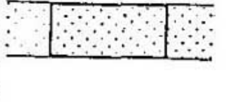
Para resolver el problema siguiente hay que realizar una investigación más minuciosa. Tendremos que dividir el plano en varias partes, y en cada una realizar un razonamiento particular.

1.3. Dado un rectángulo $ABCD$. Hallar todos los puntos del plano cuya suma de las distancias desde cada uno de ellos hasta las dos rectas AB y CD sea igual a la suma de las distancias hasta las rectas BC y AD.

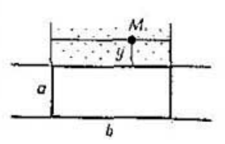


□ Designemos las longitudes de los lados del triángulo por a y b. Examinemos primero un rectángulo distinto al cuadrado: supongamos que $a < b$.

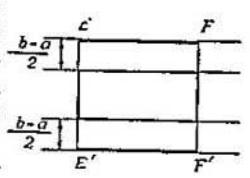
Los puntos que están dentro del rectángulo, y también entre las prolongaciones de los lados mayores, no satisfacen a los requisitos del problema, ya que una suma de las distancias es igual a a, y la otra no es menor de b.



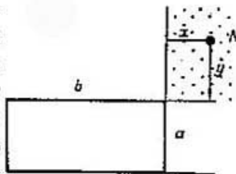
Ahora supongamos que el punto M está entre las prolongaciones de los lados menores del rectángulo. Designemos por y su distancia hasta el lado mayor más cercano del rectángulo; entonces la distancia hasta el lado opuesto el igual a $y + a$. Para que el punto satisfaga las exigencias del problema, es necesario que se cumpla la igualdad $y + (y + a) = b$, de donde $y = (b - a)/2$. De esta forma, los

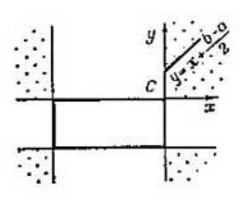


puntos que se encuentran entre las prolongaciones de los lados menores del rectángulo, a las condiciones satisfacen solamente aquéllos que estén a la distancia de $(b - a)/2$ del lado mayor más cercano del rectángulo. El conjunto de puntos en este dominio es la reunión de dos segmentos, EF y $E'F'$.

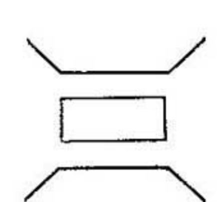


Por último, examinemos cualquier punto M, que esté en el ángulo formado por las prolongaciones de los dos lados vecinos BC y DC del rectángulo. Designemos respectivamente por x e y, las distancias desde el punto M hasta las rectas CD y BC. Entonces el requisito del problema se puede apuntar así: $x + (x + b) = y + (y + a)$, o $y = x + (b - a)/2$. Observemos que las cifras x e y pueden ser consideradas como las coordenadas del punto M en el sistema de coordenadas con ejes Cx y Cy. En este sistema de coordenadas, la ecuación $y = x + (b - a)/2$ determina una recta paralela a la bisectriz del ángulo xCy. Así pues, hemos demostrado que entre los puntos que están en el ángulo examinado, al planteamiento del problema satisfacen solamente aquellos puntos que están situados sobre la recta $y = x + (b - a)/2$.

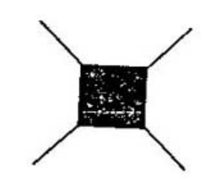




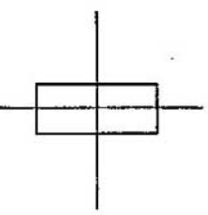
Los mismos razonamientos se pueden exponer también para los otros tres ángulos. De esta forma, hemos estudiado todos los puntos del plano.



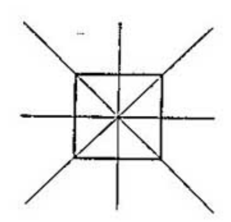
El conjunto de todos los puntos que satisfacen los requisitos planteados viene mostrado en la figura.



Todavía hay que examinar el caso cuando el rectángulo es un cuadrado, o sea, $a = b$, y aclarar en qué se convertirá el conjunto de puntos buscado. Es fácil ver que será un cuadrado y las prolongaciones de sus diagonales (?). □



Consignaremos que, *por cuanto el rectángulo tiene dos ejes de simetría, y los pares de sus lados simétricos figuran en los datos del problema equitativamente, el conjunto requerido de puntos deberá tener esos dos mismos ejes de simetría*; por eso, al resolver el problema era suficiente estudiar solamente un cuarto del plano en que éste está dividido por los ejes de simetría, y no los puntos del plano entero.



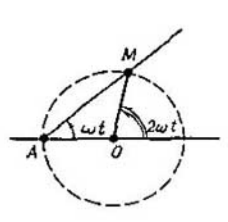
En el caso del cuadrado, sus ejes de simetría son también los ejes de simetría del conjunto buscado.

Familia de líneas y el movimiento. A la par con el cojunto de *puntos* vamos a examinar el conjunto de líneas, o, como se dice más a menudo, *la familia de líneas.*

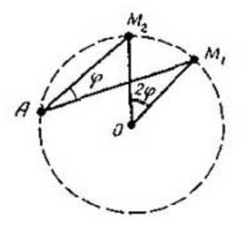
Si en un problema geométrico tratamos con una familia de circunferencias o de rectas, *es cómodo imaginarse ésta como una circunferencia o una recta en movimiento.* En el lenguaje del movimiento hemos formulado y resuelto ya los primeros problemas; dicho

lenguaje lo emplearemos reiteradamente también más adelante, pues mediante él se puede explicar con más claridad muchos problemas y teoremas.

Los ejemplos están a la vista. Volvamos al problema 1.1. Su resultado puede representarse así.



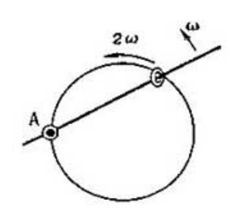
Supongamos que la recta AM gira alrededor del punto A con una velocidad angular constante ω (o sea, gira en un ángulo igual a ω por unidad de tiempo) mientras la recta OM gira alrededor del punto O con una velocidad angular de 2ω; a propósito sea dicho, en el momento inicial las dos rectas coincidían con la recta AO. Entonces el punto de intersección M de las rectas se mueve por una circunferencia cuyo centro es O.



De aquí podemos deducir *el conocido teorema sobre el ángulo inscrito*. Si la recta AM durante un tiempo t gira de la posición AM_1 a la posición AM_2 en un ángulo ωt, la recta OM gira en un ángulo $2\omega t$; dicho de otro modo, *la magnitud del ángulo inscrito M_1AM_2 es igual a la mitad de la magnitud angular del correspondiente ángulo central M_1OM_2.*

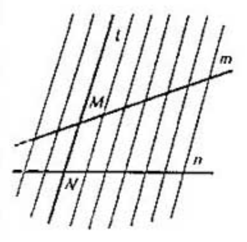
Este teorema se puede formular de manera más palpable, por ejemplo así.

Teorema sobre el anillo en la circunferencia. En una circunferencia de alambre se ha insertado un anillo pequeño. Alrededor del punto A de

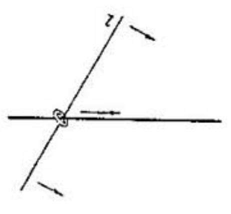


la circunferencia gira una varilla que pasa por este anillo. *Si la varilla gira con una velocidad angular uniforme* ω, *entonces el anillo correrá por la circunferencia con una velocidad angular uniforme de* 2ω.

Expondremos otro ejemplo más de un teorema que se puede formular en el lenguaje del movimiento.



Supongamos que la recta l posee en el plano *un movimiento de avance uniforme*, o sea de tal forma que su dirección no cambie, y el punto M de su intersección con una recta inmóvil m se mueva uniformemente por esta última. Entonces *el punto de intersección N de la recta l con cualquier otra recta inmóvil n se moverá también uniformemente*. De hecho, esto es otra formulación del teorema geométrico acerca de que *las líneas paralellas trazan en los lados del ángulo segmentos proporcionales*. Por analogía con el teorema sobre el anillo en la circunferencia, le vamos a dar a este hecho el siguiente aspecto.

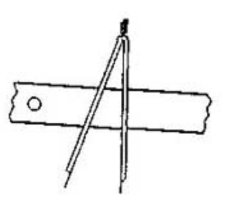


Teorema sobre el anillo en una recta. En dos rectas, en el punto de intersección se ha insertado un anillo pequeño. *Si una de ellas está inmóvil y la otra realiza un movimiento de avance* (paralelamente a sí misma) *y uniforme, el anillo realiza también un movimiento de manera uniforme.*

En adelante, más de una vez nos vamos a encontrar con diferentes fa-

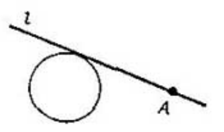
milias de rectas. En los casos cuando se trate de una familia de rectas que pasen por un punto o que sean paralelas a una dirección, puede ser útil uno u otro teorema sobre el anillo.

Problemas de construcción. En los problemas clásicos de construcción («trazar un triángulo», «marcar un segmento», «trazar una secante», «hallar un punto»), por lo general se tiene en cuenta que el trazamiento hay que realizarlo mediante «el círculo y la regla». Con otras palabras, por cualesquiera dos puntos podemos trazar una recta y trazar una circunferencia de dado radio, y también hallar los puntos de intersección de las líneas trazadas.

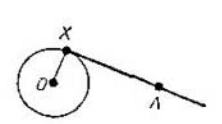


Para resolver problemas de este tipo *es cómodo representar las circunferencias y rectas como conjuntos de puntos que satisfacen a cierta condición.*

1.4. Sean dados una circunferencia y un punto A fuera de ella. Trazar por el punto A una recta l, tangente a dada circunferencia.

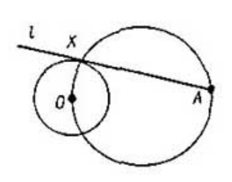


□ Si X es el punto de tangencia de la recta l con la circunferencia, el ángulo OXA es recto. El conjunto de puntos M, para los cuales el ángulo OMA es recto, constituye, como sabemos, una circunferencia cuyo diámetro es OA.



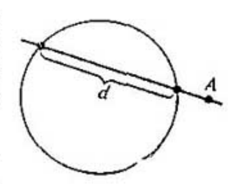
De esta manera, la recta l se puede trazar así. Dibujemos una circunfe-

rencia que tenga de diámetro el segmento OA.

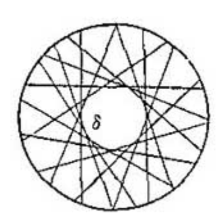


Hallemos el punto X de intersección de esta circunferencia con la dada (tales puntos son dos, simétricos respecto a la recta OA). Después, por los puntos A y X tracemos la recta l. □

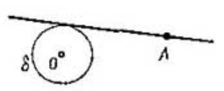
1.5. Sean dados el punto A y una circunferencia. Trazar por el punto A una recta de tal forma que la cuerda cortada por la circunferencia en la recta tenga la longitud d.



□ Estudiemos el conjunto de todas las rectas, en las que la circunferencia corta una cuerda de la longitud d. Estas rectas son tangentes a una determinada circunferencia δ, cuyo centro coincide con el centro O de la circunferencia dada, mientras su radio es igual a $\sqrt{r^2 - d^2/4}$, donde r es el radio de esta última (?). Así pues, el problema se reduce al anterior: trazar una tangente por el punto A a una circunferencia δ con el centro O.



El problema tiene dos soluciones, si el punto A está fuera de la circunferencia δ; una, si se encuentra sobre la circunferencia δ; y ninguna, si está dentro de la circunferencia δ. □

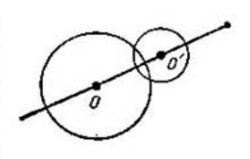


A menudo el conjunto buscado se puede obtener a partir de otro conocido aplicando una transformación simple: *mediante un viraje, simetría, traslado paralelo* o *homotecia*. (Este

método es sobre todo útil en los problemas de construcción). Recordemos como se traza la imagen de una recta o de una circunferencia al emplear los métodos de traslación o transformación de semejanza.

Para una recta es suficiente marcar dos puntos A' y B' — imágenes de ciertos puntos A y B — y trazar por los puntos A' y B' la recta.

Para una circunferencia de radio r es suficiente marcar un punto O' — imagen de su centro O— y trazar una circunferencia con el centro O' del mismo radio (si se trata del traslado) o de radio kr (siendo k el coeficiente de semejanza).

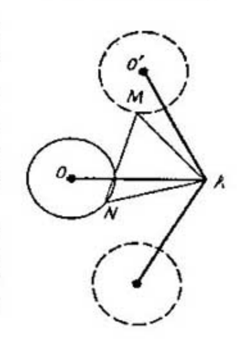


Mostremos ejemplos típicos de problemas en los que se emplean las transformaciones (en este caso, traslados).

1.6. Sean dados un punto A y una circunferencia. Hallar el conjunto de vértices M de triángulos equiláteros ANM, el vértice N de los cuales está sobre dada circunferencia.

☐ Supongamos que N es algún punto de dada circunferencia. Si viramos el segmento AN en 60° con respecto al punto A, el punto N caerá en el vértice M del triángulo equilátero ANM. De aquí se deduce en seguida que, si viramos la circunferencia, como una figura rígida con respecto al punto A, en 60°, cada pun-

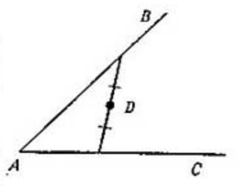
to N de ella se trasladará al correspondiente a él tercer vértice M del triángulo equilátero ANM.



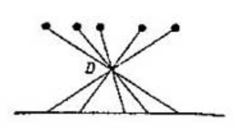
De este modo, todos los puntos M están en una de las dos circunferencias, que se obtienen de la dada virándola en 60° en sentido horario o antihorario respecto al punto A.

De la misma manera se puede mostrar que cada punto M de la reunión de las dos circunferencias obtenidas es el vértice de cierto triángulo equilátero ANM. □

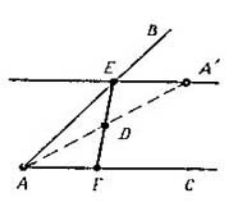
1.7a. Sean dados un ángulo y, dentro de él, un punto D. Trazar un segmento los extremos del cual estén sobre los lados de dado ángulo y su centro sea el punto D.



□ Examinemos el conjunto de segmentos, un extremo de los cuales esté en el lado AC del ángulo dado (con el vértice A), y el centro se encuentre en el punto dado D. Los otros extremos de estos segmentos pertenecen, evidentemente, a un rayo simétrico al lado AC del ángulo con relación al punto D.



La construcción se reduce a lo siguiente: marcamos el punto A' simétrico al punto A con relación a D; a través de A' trazamos una recta paralela a la recta AC, hasta que se cruce en el punto E con la recta AB, y obtenemos el segmento necesario EF, con el centro en el punto D. El

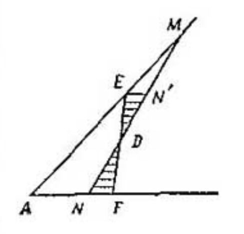


problema tiene siempre una sola solución.

Es curioso que esta construcción resuelve el siguiente problema.

1.7b. Dados un ángulo y, dentro de él, un punto D. Trazar por el punto D una recta que corte del ángulo dado un triángulo cuya superficie sea la menor posible.

☐ Demostremos que la recta buscada resulta ser justamente la recta EF que hemos trazado en el problema anterior, o sea, aquélla para la cual el segmento, que se corta por los lados del ángulo, se divide por el punto D en partes iguales.



Tracemos por el punto D la recta MN, diferente a EF, y demostremos que:

$$S_{MAN} > S_{EAF}. \qquad (1)$$

Puede considerarse que el punto M sobre el lado AB está más lejos del vértice del ángulo A, es decir que E (el caso cuando M está más cerca de A que E se estudia por analogía; los lados AB y AC cambian de papel). Es suficiente convencerse de que

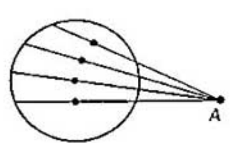
$$S_{EDM} > S_{FDM}, \qquad (2)$$

pues de aquí en seguida se deduce la desigualdad (1). Pero la desigualdad (2) es evidente, ya que el triángulo EDM comprende por entero el tri-

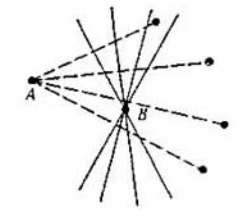
ángulo EDN', simétrico a FDN respecto al punto D.

Diversidad de problemas.

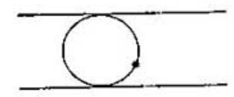
1.8. Se dan dos puntos A y B. Hallar el conjunto de bases de las perpendiculares bajadas desde el punto A a cualesquiera rectas que pasan por el punto B.



1.9. En un plano se dan una circunferencia y un punto A. Determinar el conjunto de puntos medios de las cuerdas que se cortan por dada circunferencia en las rectas que pasan por el punto A. (Naturalmente deberán estudiarse todos los casos: cuando el punto A está dentro, fuera y sobre la circunferencia).

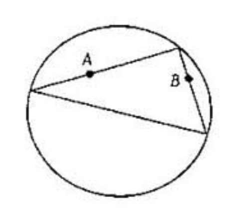


1.10. Sean dados dos puntos A y B. Hallar el conjunto de puntos, cada uno de los cuales es simétrico al punto A con relación a cierta recta que pase por el punto B.



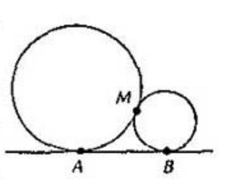
1.11. Trazar una circunferencia tangente a dos rectas paralelas dadas y que pase por un punto dado, situado entre las mismas.

1.12. Trazar una circunferencia de radio r, tangente a dada recta y a dada circunferencia.

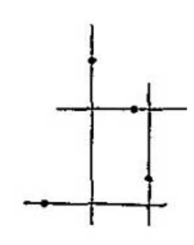


1.13. Están dados una circunferencia y dos puntos, A y B, dentro de ella. Hay que inscribir en la circunferencia un triángulo rectángulo de

modo que sus catetos pasen correspondientemente por estos puntos. ↓



1.14. Sean dos puntos A y B. Dos circunferencias tienen tangencia a la recta AB; una, en el punto A; la otra, en el punto B, y son tangentes mutuamente en el punto M. Hallar el conjunto de los puntos M. ↓



1.15. En un plano se han dado cuatro puntos. Hallar el conjunto de centros de los rectángulos formados por cuatro rectas que pasan correspondientemente por cada punto. ↓

1.16. Los lados OP y OQ del rectángulo $OPMQ$ están sobre los lados del ángulo recto dado. Hallar el conjunto de puntos M a condición de que:

a) la longitud de la diagonal PQ,

b) la suma de los lados OP y OQ,

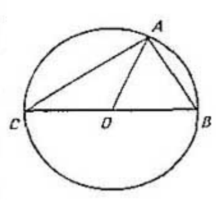
c) la suma de los cuadrados de los lados OP y OQ sea igual a una magnitud dada d.

1.17. Hallar el conjunto de puntos, la suma de los cuadrados de las distancias desde los cuales hasta los cuatro lados del rectángulo dado (o hasta sus prolongaciones) sea igual al cuadrado de su diagonal.

1.18. A y B son dos ciudades. Hallar el conjunto de puntos M que tengan la siguiente propiedad: si se va en línea recta de M a B, la distancia de M a A irá aumentando continuamente.







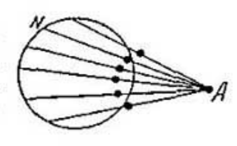
1.19. Supongamos, que sobre el triángulo ABC se sabe que la longitud de la mediana AO:

a) es igual a la mitad de la longitud del lado BC,

b) es mayor de la mitad de la longitud del lado BC,

c) es menor de la mitad de la longitud del lado BC.

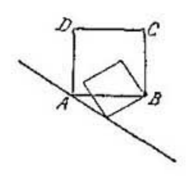
Demostrar que el ángulo A es correspondientemente: a) recto, b) agudo, c) obtuso.



1.20. En un plano se han dado una circunferencia y el punto A. Hallar el conjunto de puntos medios del segmento AN, donde N es un punto cualquiera de la circunferencia.

1.21. Sean dados un círculo y un punto fuera de él. Trazar por este punto una secante de forma que la longitud de los segmentos de la secante fuera y dentro del círculo sean iguales.

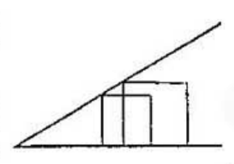
1.22. Por el punto de intersección de dos circunferencias dadas trazar una recta en la que estas circunferencias corten cuerdas de igual longitud.



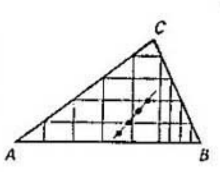
1.23. Hallar el conjunto de vértices C de los cuadrados $ABCD$, en los cuales el vértice A esté en dada recta y el vértice B, en dado punto.

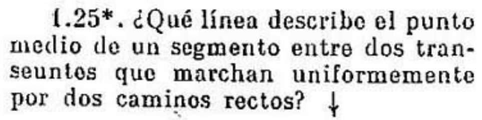
1.24. a) ¿Dónde puede hallarse el cuarto vértice del cuadrado, si dos de sus vértices están sobre un lado de

dado ángulo agudo, y el tercero, sobre el otro? Examine las diversas variantes de situaciones del cuadrado.



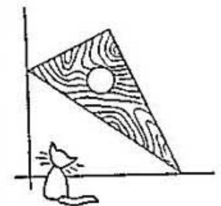
b) Dado un triángulo acutángulo ABC. Inscribir en él un cuadrado, en el cual dos vértices se hallan en lado AB.



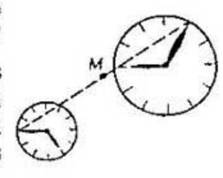


1.25*. ¿Qué línea describe el punto medio de un segmento entre dos transeuntes que marchan uniformemente por dos caminos rectos? ↓

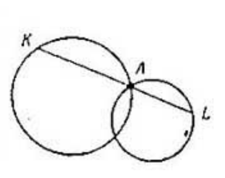
1.26*. En dado triángulo ABC se inscriben todo género de rectángulos en los cuales un lado esté sobre la recta AB. Hallar el conjunto de centros de estos rectángulos.



1.27. Un triángulo rectángulo de madera se traslada por el plano de forma que los vértices de sus ángulos se muevan por los lados de dado ángulo recto. ¿Cómo se moverá el vértice del ángulo recto de dicho triángulo?



1.28*. Sobre una mesa hay dos relojes planos. Uno y otro andan con exactitud. ¿Por qué línea se traslada el centro M del segmento que une los extremos de sus agujas minuteras? ↓



1.29*. Por el punto A de intersección de dos circunferencias dadas, se traza una recta arbitraria que corta estas circunferencias de nuevo en los puntos K y L, correspondientemente. Hallar el conjunto de centros de los segmentos KL. ↓

2 Alfabeto

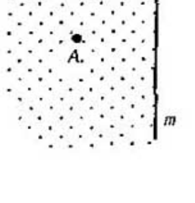
Este capítulo es un formulario de teoremas sobre los conjuntos de puntos que satisfacen a unas u otras condiciones geométricas. Poco a poco vamos a hacer una lista entera de teoremas y condiciones que puedan emplearse en las soluciones de problemas de distinto tipo.

Se puede trazar un paralelo entre los problemas geométricos: hallar un conjunto de puntos, y los problemas corrientes de álgebra: resolver una ecuación (sistema de ecuaciones, desigualdad). En rigor, resolver una ecuación o una desigualdad significa hallar un conjunto de números, que satisfagan a cierta condición. Lo mismo que en el curso escolar de álgebra las ecuaciones más diversas (por ejemplo, trigonométricas, logarítmicas) generalmente se reducen a ecuaciones lineales o cuadradas, a menudo hasta las tareas geométricas más difíciles resultan ser solamente una nueva

propiedad de la recta o de la circunferencia.

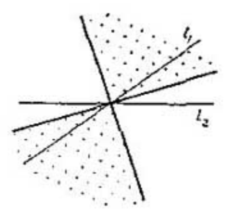
La analogía entre los problemas de álgebra y los problemas donde hay que hallar un conjunto de puntos, no es solamente externa. Mediante el método de coordenadas se puede reducir el uno al otro. Empleando este método, veremos que enunciados geométricos, que a primera vista parecen diferentes, se abarcan por teoremas comunes.

Empezaremos nuestro alfabeto con las afirmaciones más sencillas.



A. *El conjunto de puntos equidistantes de dos puntos dados A y B, es una recta perpendicular al segmento AB y pasa por su punto medio.*

Esta recta *m* la denominaremos *mediatriz* del segmento *AB*. Ella divide el plano en dos semiplanos. Los puntos de un semiplano están más cerca de *A* que de *B*; y los del otro, al contrario. Los puntos *A* y *B* son simétricos con relación a *m*.



B. *El conjunto de puntos equidistantes de dos líneas dadas cruzadas* l_1 y l_2, *son dos rectas recíprocamente perpendiculares que dividen por la mitad los ángulos formados por las rectas* l_1 y l_2.

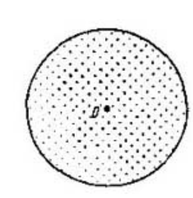
Estas rectas sirven como ejes de simetría de la figura formada por las rectas l_1 y l_2. Este conjunto — *«la cruz de bisectrices»* — divide el plano en cuatro partes. En el dibujo están se-

ñalados dos ángulos rectos y el conjunto de puntos situados más cerca de la recta l_1, que de la recta l_2.

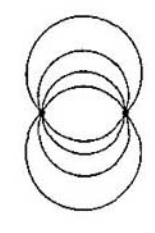
C. *El conjunto de puntos cuya distancia hasta una recta dada l es igual al número dado h ($h > 0$), es un par de rectas l_1 y l_2 paralelas a la recta l y situadas a diferentes lados de ésta.*

La franja entre las rectas l_1 y l_2 es el conjunto de puntos que distan menos de h respecto a la recta l.

D. *El conjunto de puntos cuyas distancias hasta el punto dado O es igual a cierto número r ($r > 0$) es una circunferencia de radio r con el centro O.* (Esto es la definición de la circunferencia).

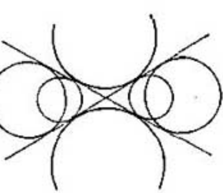


Una circunferencia divide el plano en dos partes: interior y exterior. Para los puntos situados en el círculo, la distancia hasta el centro es menor de r, mientras que para los puntos situados fuera del mismo, mayor de r.



Unas cuantas modificaciones pequeñas de las condiciones **A**, **B**, **C**, **D** ofrecemos en forma de los cuatro problemas siguientes.

2.1. Hallar el conjunto de centros de circunferencias que pasan por dos puntos dados.

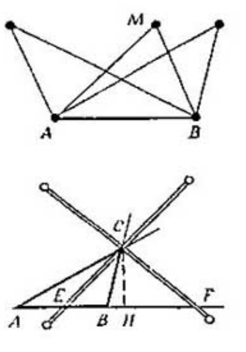


2.2. Hallar el conjunto de centros de circunferencias tangentes a dos rectas dadas que se intersecan.

2.3. Hallar el conjunto de centros de circunferencias de radio r, tangentes a dada recta.

2.4. Dados dos puntos A y B. Hallar el conjunto de puntos M, para los cuales la superficie S_{AMB} del triángulo AMB es igual a cierto número $c > 0$.

Ilustremos la afirmación **B** con un ejemplo de mayor contenido, demostremos el teorema de las bisectrices del triángulo.



2.5. Supongamos que «la cruz de bisectrices» de AC y BC corta la recta AB en los puntos E y F. Demostrar que

$$\frac{|AE|}{|EB|}=\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{|AC|}{|CB|}.$$

□ Sea que M es uno de los puntos E y F. Haremos notar que

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{S_{ACM}}{S_{MCB}}.$$

(Los triángulos ACM y MCB tienen la altura común CH).

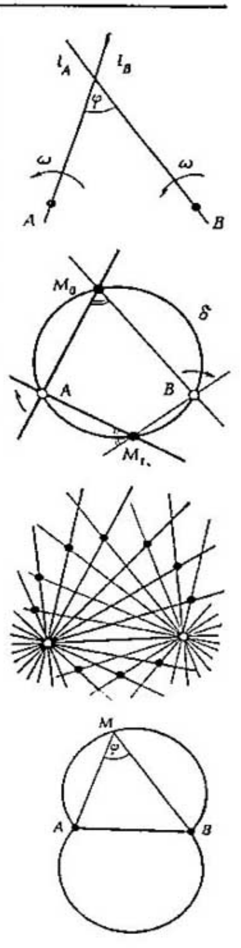
La relación de las superficies se puede expresar de otra forma; puesto que el punto M pertenece a la cruz de bisectrices, entonces será equidistante de las rectas AC y BC, o sea,

$$\frac{S_{ACM}}{S_{MCB}}=\frac{|AC|}{|CB|}. \quad □$$

La circunferencia y un par de arcos. El siguiente punto del alfabeto es otra variante más del teorema del ángulo inscrito y del anillo en la circunferencia, que hemos analizado en el parágrafo 1.

E°. *Dos rectas que se cortan l_A y l_B, giran en el plano alrededor de sus dos puntos A y B a una velocidad angular igual a* ω (ni que decir tiene que la magnitud del ángulo entre ellas se mantiene constante). La trayectoria del punto de intersección de estas rectas es una circunferencia.

□ Tracemos una circunferencia δ, que pase por tres puntos: *A*, *B* y una posición más, M_0, punto de intersección de las rectas l_A y l_B. Según el teorema «sobre el anillo en la circunferencia» del parágrafo 1, el punto de intersección de la recta l_A y la circunferencia δ se mueve por ésta uniformemente a la velocidad angular de 2ω. De la misma manera se mueve el punto de intersección l_B con la circunferencia δ. Puesto que en cierto momento (situación M_0) ellas coinciden, también coincidirán en cualquier otro momento.



Ofrecemos otra variante más del teorema E, sin utilizar el lenguaje del movimiento.

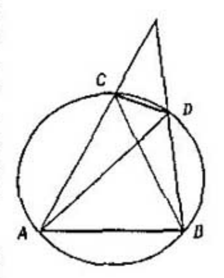
E. *El conjunto de puntos, desde los cuales el segmento AB se ve con un ángulo del valor dado* φ (o sea, el conjunto de puntos, para los cuales $\widehat{AMB} = \varphi$) es un par de arcos con los extremos en los puntos *A* y *B*, simétricos con relación a la recta *AB*.

El dominio limitado por estos arcos, es el conjunto de puntos *M*,

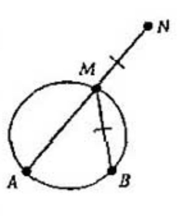
para los cuales $\widehat{AMB} > \varphi$.

Observemos, que si $\varphi = 90°$, el conjunto E será una circunferencia con el diámetro AB. Ya hablamos de esto después de analizar el problema **0.1.**

2.6. La cuerda AB de dada circunferencia está sujeta, y la CD se traslada, sin cambiar su longitud. ¿Acorde con qué línea se mueve el punto de intersección de las rectas: a) AD y BC; b) AC y BD?

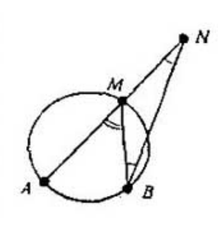


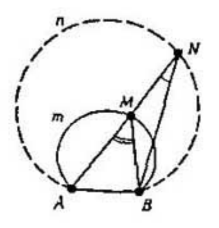
2.7. Sean en un plano dos puntos A y B. Hallar el conjunto de vértices M y N de los paralelogramos $AMBN$ para los cuales se da el ángulo $MAN = \varphi$.



2.8a. Sean una circunferencia y dos puntos A y B en ella. Supongamos que M es un punto arbitrario en la misma. En la prolongación del segmento AM, desde el punto M se marca un segmento MN cuya longitud sea igual al segmento BM. Hallar el conjunto de puntos N.

☐ Sea N cierto punto trazado como se indica en el problema; entonces $|BM| = |NM|$ y $\widehat{NBM} = \widehat{MNB}$. Pero como $\widehat{AMB} = \widehat{MBN} + \widehat{MNB}$, entonces $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}/2$. El valor del ángulo AMB para todos los puntos M que están

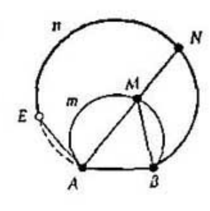




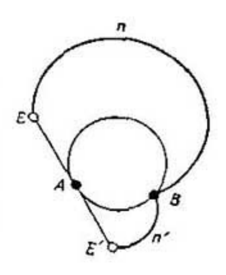
en uno de los arcos $\widehat{AB}$, es el mismo (véase E): $\widehat{AMB} = \varphi$. Por esto $\widehat{ANB} = \varphi/2$, o sea, todos estos puntos resultan en el arco $\widehat{AnB}$, que contiene el ángulo $\varphi/2$. (El centro del arco coincide con el centro del arco $\widehat{AmB}$ de dada circunferencia (?)).

¿Nos satisfacen todos los puntos del arco $\widehat{AnB}$? No, no todos.

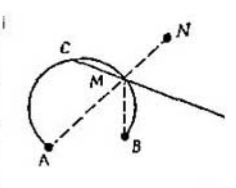
Observemos que cuando el punto M recorre el arco AnB, desde el punto B hasta el punto A, la cuerda AM gira alrededor del punto A, desde la recta AB hasta la tangente a esta circunferencia en el punto A. Por esto al conjunto buscado le pertenece sólo una parte del arco AnB, a saber, el arco EnB (E es el punto donde el arco AnB se corta por la tangente hacia el punto A).



En este caso puede considerarse que el punto B pertenece a nuestro conjunto (se obtiene para la posición del punto M cuando éste coincide con B y «la longitud del segmento MB es igual a 0»). El punto E, hablando en rigor, no pertenece a nuestro conjunto; cuando el punto M coincide con el punto A, no tiene sentido hablar sobre la dirección de la recta AM.



Por analogía se estudian los puntos que están del lado contrario de la recta AB. Así pues, el conjunto de puntos buscado consta de dos arcos: $\widehat{EnB}$ y $\widehat{E'n'B}$. □



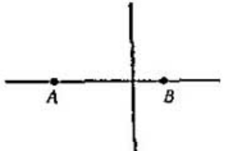
Se puede resolver el problema 2.8a de otra forma, si se observa que los puntos N y B son simétricos con respecto a la recta CM, donde C es el centro del arco $\widehat{AmB}$. De esta observación resulta que el conjunto de puntos N se reduce al conjunto de puntos del problema 1.10 para los puntos A y C.

Plantearemos un problema análogo al 2.8a, en el cual al lector se le propone hacer una investigación semejante.

2.8b. Las condiciones quedan las mismas que para el problema 2.8a, a excepción de que el segmento MN se sitúa en dirección opuesta: en el rayo MA.

Cuadrados de las distancias. Examinemos dos puntos A y B en el plano y un número arbitrario C.

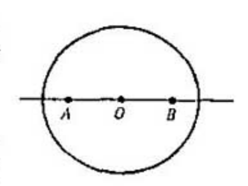
F. *El conjunto de puntos M, para los cuales*



$$|AM|^2 - |BM|^2 = c,$$

es una recta perpendicular al segmento AB. (En particular, siendo $c = 0$ resulta la mediatriz A.)

G. Supongamos que $|AB| = 2a$. *El conjunto de puntos M, para los cuales*



$$|AM|^2 + |BM|^2 = c$$

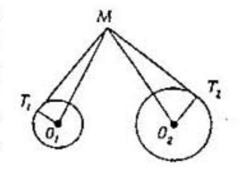
a) siendo $c > 2a^2$ *es una circunferencia con centro en* el medio O del segmento AB y radio $r = \sqrt{(c - 2a^2)/2}$,

b) en caso de $c = 2a^2$, *el punto O*,

c) cuando $c < 2a^2$, *un conjunto vacío.*

Las afirmaciones F y G no son difíciles de demostrar con ayuda del teorema de Pitágoras o mediante el método de coordenadas (?). No vamos a ofrecer demostraciones por separado para cada una de ellas, sino que las deduciremos como corolarios de un teorema más común. Pero antes las ilustraremos con unos ejemplos.

2.9. Hallar el conjunto de puntos para los cuales las tangentes trazadas a dos circunferencias dadas, tienen una misma longitud.

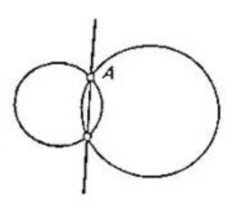


□ Sean O_1 y O_2 los centros de dichas circunferencias; r_1 y r_2, sus radios ($r_2 \geqslant r_1$); MT_1 y MT_2, las tangentes trazadas desde el punto M hacia las mismas. Aplicando el teorema de Pitágoras, apuntemos la condición $|MT_1|^2 = |MT_2|^2$ así:

$$|MO_1|^2 - |O_1T_1|^2 = |MO_2|^2 - |O_2T_2|^2,$$

o

$$|MO_2|^2 - |MO_1|^2 = r_2^2 - r_1^2.$$



De acuerdo con la afirmación F, el conjunto de puntos M se encontrará sobre una recta, perpendicular a la recta O_1O_2.

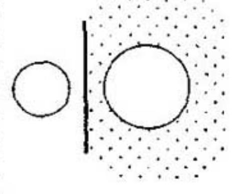
Si las circunferencias se cortan, esta recta pasará por los puntos de intersección. En realidad, si A es uno de dichos puntos, entonces

$$|O_2A|^2 - |O_1A|^2 = r_2^2 - r_1^2$$

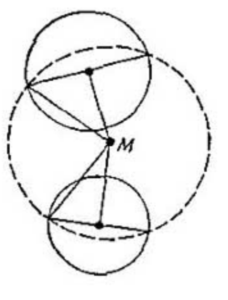
y, por consiguiente, el punto A se halla en esta recta. El conjunto de los puntos buscados en este caso viene representado en el dibujo; resulta ser el lugar geométrico de dos rayos.

Si las circunferencias son concéntricas (y además $r_2 > r_1$), el conjunto de puntos buscado resulta vacío. Si las circunferencias coinciden, todos los puntos están fuera del círculo. Si las circunferencias no se intersecan ni son concéntricas, la respuesta será una recta. □

La recta sobre la que se habla en el problema 2.9, se llama *eje radical de dos circunferencias.* Sean dadas dos circunferencias que no se cortan. Entonces su eje radical divide el complemento a estos dos círculos en dos partes: el conjunto de puntos M, para los cuales $|MT_1| > |MT_2|$, y el conjunto de puntos M, para los cuales $|MT_1| < |MT_2|$.



2.10. Hallar el conjunto de centros de circunferencias que cortan cada una de las dos circunferencias dadas en puntos diametralmente opuestos.

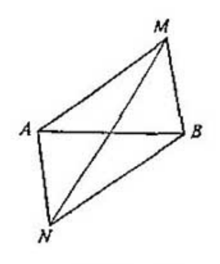


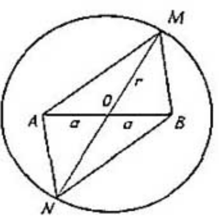
2.11. a) La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados. Demostrarlo.

b) Si en un cuadrilátero convexo $AMBN$ las diagonales son perpendiculares mutuamente, entonces $|AM|^2 +$

$+ |BN^2| = |AN|^2 + |BM|^2$; Demostrarlo. ↓

□ a) Supongamos que los vértices A y B del paralelogramo $AMBN$ distan a de su centro O, los vértices M y N, distan r del mismo y que $c = 2(a^2 + r^2)$. Como $|OM| = \sqrt{(c - 2a^2)/2}$, entonces, de acuerdo con **G**, la suma de los cuadrados de las distancias desde el punto M hasta los puntos A y B es igual a c. Igualmente $|AN|^2 + |BN|^2 = c$; por eso:





$$|AM|^2 + |BM|^2 + AN|^2 + |BN|^2 = 2c = 4(a^2 + r^2) = |MN|^2 + |AB|^2. \square$$

Ahora ofrecemos el teorema común que incluye los puntos **F**, **G**, **A** y **D** del alfabeto.

Teorema sobre los cuadrados de las distancias. *El conjunto de puntos M para los que se cumple la condición*

$$\lambda_1|MA_1|^2 + \lambda_2|MA_2|^2 + \ldots + \lambda_n|MA_n|^2 = \mu, \quad (1)$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son los puntos dados y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu$, *los números dados, representa en sí una de las más simples figuras geométricas siguientes:*

1°, *si* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \neq 0$, *puede ser una circunferencia, un punto o un conjunto vacío;*

2°, *si* $\lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_n = 0$, *puede ser una recta, todo el plano o un conjunto vacío.*

El teorema lo demostraremos con ayuda del método de coordenadas.

□ El cuadrado de las distancias entre los puntos $M(x; y)$ y $A_k(x_k; y_k)$ se calcula empleando la fórmula

$$|MA|^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 =$$
$$= x^2 + y^2 - 2x_k x - 2y_k y + x_k^2 + y_k^2.$$

Examinemos la expresión:

$$\lambda_1 |MA_1|^2 + \lambda_2 |MA_2|^2 + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_n |MA_n|^2.$$

Para anotarla en coordenadas hay que sumar unas cuantas expresiones de tipo

$$\lambda (x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2).$$

Es claro que al final la condición (1) se escribirá en forma de la ecuación

$$dx^2 + dy^2 + ax + by + c = 0, \qquad (2)$$

donde $d = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Demostremos ahora que la ecuación (2) corresponde a una de las figuras enumeradas anteriormente.

1°. Si $d \neq 0$, podemos transformar (2) de la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{d} x + \frac{b}{d} y + \frac{c}{d} = 0,$$

$$\left(x + \frac{a}{2d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2d}\right)^2 =$$
$$= \frac{b^2 + a^2 - 4dc}{4d^2}. \qquad (2')$$

Vemos que la ecuación es:

una circunferencia con el centro en el punto $C(-a/2d; -b/2d)$, si la parte derecha de (2') es positiva;

un punto $C(-a/2d; -b/2d)$, si la parte derecha es igual a cero;

un conjunto vacío, si la parte derecha es negativa.

2°. Si $d = 0$, la ecuación (2) toma la forma

$$ax + by + c = 0.$$

Esto será:

una recta, si $a^2 + b^2 \neq 0$,

todo el plano, si $a = b = c = 0$,

un conjunto vacío, si $a = b = 0$, $c \neq 0$. □

En un problema concreto, por regla general, es fácil aclarar, cuál de estos casos tiene lugar. Volvamos de nuevo a los puntos F y G de nuestro alfabeto, que quedaron sin demostrar.

Demostración de F. La condición $|MA|^2 - |MB|^2 = c$ es un caso particular de (1), donde $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, de donde $d = 0$, y, por consiguiente, determina una recta, o un plano, o bien un conjunto vacío.

Como la ecuación $(x + a)^2 - (x - a)^2 = c$ tiene siempre la única solución $x = c/4a$, en la recta AB existe solamente un punto del conjunto. Por consiguiente, el conjunto buscado es una recta. Desde el punto de vista de la simetría es evidente que ésta será perpendicular a la recta AB. □

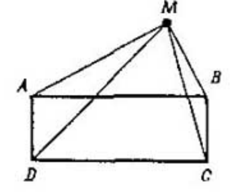
A O B
(−a) (a) x

Demostración de G. La condición $|MA|^2 + |MB|^2 = c$ es un caso particular de (1), aquí $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $d \neq 0$ y, por tanto, el conjunto buscado resulta o un conjunto vacío, o un punto, o bien una circunferencia. Como los puntos A y B figuran en la condición simétricamente, el centro de la circunferencia se encuentra en el centro del segmento AB.

Para saber cuándo el conjunto buscado es una circunferencia y determinar su radio, busquemos en la recta AB los puntos, que satisfagan a la condición $|AM|^2 + |BM|^2 = c$. Para esto observemos que la ecuación $(x - a)^2 + (x + a)^2 = c$ tiene solución, cuando $c \geqslant 2a^2$; además

$$|x| = r = \sqrt{(c - 2a^2)/2}. \ \square$$

2.12. Hallar el conjunto de puntos, la suma de los cuadrados de las distancias desde los cuales hasta los dos vértices opuestos de un rectángulo dado es igual a la suma de los cuadrados de las distancias hasta sus dos otros vértices.



□ *Respuesta*. Todo el plano. Demostrémoslo. Supongamos que $ABCD$ es el rectángulo dado; entonces estamos buscando el conjunto de puntos M, para los cuales

$$|MA|^2 + |MC|^2 - |MB|^2 - |MD|^2 = 0.$$

Pongamos en la condición (1) que $n = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. De acuerdo con el teorema, el conjunto buscado es una recta, o un conjunto vacío, o bien todo el plano.

Señalemos que los vértices A, B, C y D del mismo rectángulo satisfacen la condición. Por ejemplo, para el punto A es correcta la igualdad:

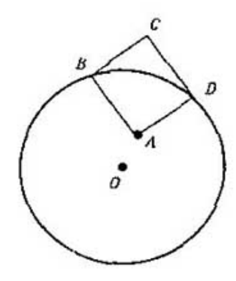
$$|AA|^2 + |AC|^2 - |AB|^2 - |AD|^2 = 0$$ (teorema de Pitágoras).

Así pues, el conjunto buscado no es vacío ni es una recta. Por lo tanto resulta que el conjunto es todo el plano. □

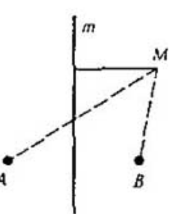
Del resultado del problema 2.12 se deduce que si $ABCD$ es un rectángulo, para cualquier punto M del plano se cumple la igualdad

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2.$$

Basándose en este hecho, resuelva el siguiente problema.

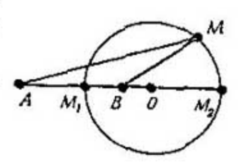


2.13. Sean una circunferencia y un punto A dentro de ésta. Hallar el conjunto de los cuartos vértices C de los rectángulos $ABCD$, los vértices B y D de los cuales pertenecen a la circunferencia dada.



2.14. Demostrar que $|MA|^2 - |MB|^2 = 2|AB|\rho(M, m)$, donde m es la mediatriz del segmento AB, además $|MA| > |MB|$.

Añadamos a nuestro alfabeto un punto más, que a menudo se emplea en geometría y es también corolario del teorema de los cuadrados de distancias.



H. *El conjunto de puntos M, para los cuales*

$$|MA|/|MB| = k, \quad k > 0, \; k \neq 1,$$

es una circunferencia, cuyo diámetro pertenece a la recta AB.

Este conjunto de puntos, la relación de cuyas distancias hasta dos puntos dados A y B es constante, se llama *circunferencia de Apolonio.*

□ Copiemos la condición H en forma de

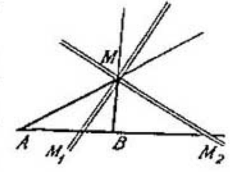
$$|MA|^2 - k^2 |MB|^2 = 0.$$

Esta condición es un caso particular del requisito (1), donde $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda = -k^2$ y por consiguiente si $1 - k^2 \neq 0$, el conjunto buscado es o una circunferencia, o un punto, o bien un conjunto vacío. Puesto que la ecuación

$$(x + a)^2 = k^2 (x - a)^2$$

cuando $k^2 \neq 1$ siempre tiene dos soluciones, en la recta AB existen dos puntos M_1 y M_2 de este conjunto, por lo tanto, el conjunto buscado es una circunferencia. Como la condición es simétrica con relación a la recta AB,

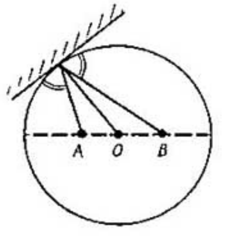
el diámetro de esta circunferencia es el segmento M_1M_2. □



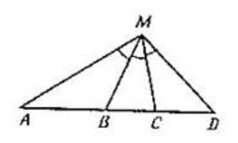
Observemos, a propósito sea dicho, que si M es un punto de la circunferencia de Apolonio, entonces la cruz de las bisectrices de las rectas AM y MB corta la recta AB en los puntos M_1 y M_2. (Esto emana del teorema sobre la cruz de las bisectrices 2.5, ya que $\left|\frac{AM_1}{BM_1}\right| = \left|\frac{AM_2}{BM_2}\right| = \left|\frac{AM}{BM}\right|$).

Este razonamiento se emplea en el siguiente problema.

2.15. En el diámetro de una mesa redonda de billar estaban situadas dos bolas A y B. La bola B fue impulsada de forma que, al retroceder del borde de la mesa, dio en la bola A. Restablecer la trayectoria de la bola B, si el golpe no fue dirigido por el diámetro.

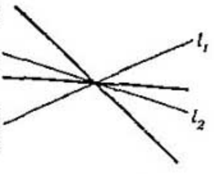


2.16. Sobre dada recta se hallan los puntos A, B, C, D. Trazar en el plano un punto desde el cual los segmentos AB, BC, CD se vean con un mismo ángulo.

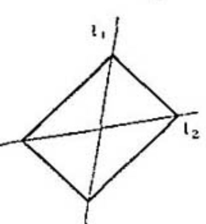


Distancias hasta las rectas. Hasta ahora en el alfabeto se han utilizado fundamentalmente unas u otras propiedades que caracterizan la circunferencia. En los dos puntos siguientes del alfabeto solamente van a figurar rectas (que se encuentran por pares).

Examinemos dos rectas l_1 y l_2 que se cortan en el plano y una cifra positiva c.



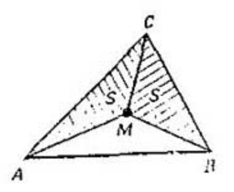
I. *El conjunto de puntos M, el cociente* $\rho'(M, l_1)/\rho(M, l_2)$ de cuyas distancias hasta las rectas l_1 y l_2 es igual a c, es un par de rectas que pasan por el punto de intersección de dichas rectas l_1 y l_2.



J. *El conjunto de puntos M, la suma $\rho(M, l_1) + \rho(M, l_2)$ de cuyas distancias hasta las rectas l_1 y l_2 es igual a c, es el contorno de un rectángulo cuyas diagonales se encuentran sobre estas mismas.*

Antes de demostrar estos teoremas, los ilustraremos con dos ejemplos.

2.17. Dado el triángulo ABC. Hallar el conjunto de puntos M, para los cuales $S_{AMC} = S_{BMC}$.

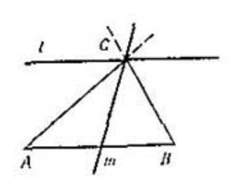


□ Sean h_b y h_a las distancias desde el punto M hasta las rectas AC y BC, correspondientemente. Entonces

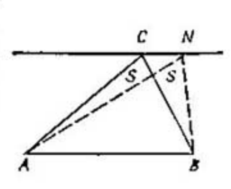
$$S_{AMC} = \frac{|AC| \cdot h_b}{2}, \quad S_{BMC} = \frac{|BC| \cdot h_a}{2},$$

por consiguiente, $h_a/h_b = |AC|/|BC|$.

O sea, que el conjunto buscado M resulta ser el conjunto I para las rectas AC y BC mientras $c = |AC|/|BC|$. De esta manera, representa en sí un par de rectas que pasan por el punto C. Demostremos que la recta m contiene la mediana del triángulo, y la otra, l, es paralela a AB. Para



esto es suficiente tomar un punto en cada una de estas rectas y comprobar que para ellas se cumple la condición.



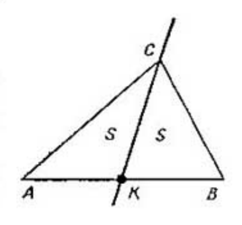
Designemos por h la longitud de la altura del triángulo trazada desde el vértice C. Sea N un punto de la recta l; entonces

$$S_{ACN} = \frac{|CN|\cdot h}{2} \quad \text{y} \quad S_{BCN} = \frac{|CN|\cdot h}{2},$$

o sea, $S_{ACN} = S_{BCN}$ y la recta l pertenece al conjunto buscado.

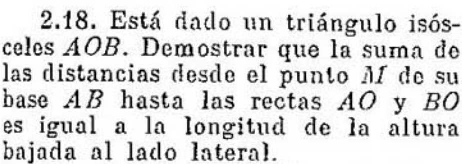
Supongamos que K es el centro del lado AB, o sea que $|AK| = |KB|$.

Entonces $S_{AKC} = |AK|\cdot h/2 = = |BK|\cdot h/2 = S_{BKC}$, y por lo tanto toda la recta m pertenece al conjunto buscado. □

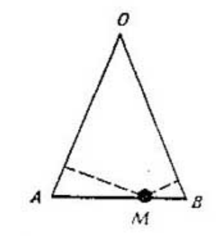


Por analogía con la cruz de las bisectrices, el par de rectas m y l puede ser denominado «cruz de las medianas» del vértice C del triángulo.

La afirmación J, en realidad, se puede reducir al siguiente problema así.



2.18. Está dado un triángulo isósceles AOB. Demostrar que la suma de las distancias desde el punto M de su base AB hasta las rectas AO y BO es igual a la longitud de la altura bajada al lado lateral.



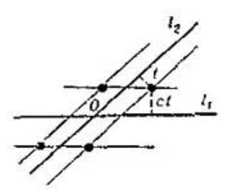
No vamos a aducir demostraciones geométricas de los puntos I y J, aunque no son difíciles, sino que vamos a presentarlos con ayuda del lenguaje

del movimiento (al igual que se ha hecho anteriormente en el punto E «circunferencia y un par de arcos»). Formulemos primero el lema, que sintetiza el teorema del anillo en la recta (pág. 27).

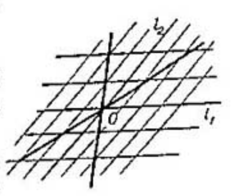
Lema. *Sobre dos rectas l_1 y l_2 en el punto de su intersección se ha insertado un anillo pequeño M. Si cada recta realiza un movimiento de traslación uniforme, el anillo M realiza un movimiento uniforme por cierta recta.*

□ Esta recta se puede trazar señalando dos posiciones M_1 y M_2 del anillo. Los puntos de intersección de las rectas en movimiento con la recta inmóvil M_1M_2 se mueven uniformemente. Como en dos momentos de tiempo (cuando el anillo M pasa por los puntos M_1 y M_2) dichos puntos coinciden el uno con el otro, coincidirán todo el tiempo. □

Demostración de I. Para cierta cifra positiva t, el conjunto de puntos que se encuentran a la distancia t de l_2 y ct de l_1 son los cuatro vértices de un paralelogramo cuyo centro es el punto de intersección O de las rectas l_1 y l_2. En realidad, el conjunto de puntos que están a la distancia t de l_2 es un par de rectas paralelas (véase C), y el conjunto de puntos, que está a la distancia ct de l_2, también es un par de rectas paralelas, y sus puntos de intersección son los cuatro vértices del paralelogramo. Estos cuatro pun-



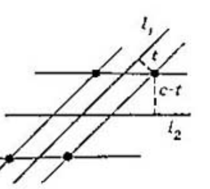
tos satisfacen a la condición I, ya que $ct/t = c$.

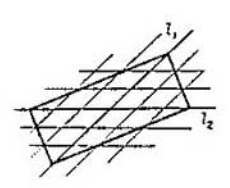


Cambiando el número t desde 0 hasta la infinidad, obtendremos todos los puntos del conjunto buscado.

Si tomamos t como «tiempo», vemos que las cuatro rectas trazadas se mueven uniformemente (manteniéndose paralelas a l_1 y l_2). Según el lema los puntos de intersección (los anillos) avanzan por rectas que pasan por el punto O. □

Demostración de J. Tracemos dos rectas a la distancia t de l_1, y otras dos, a la distancia ct de l_2 $(0 \leqslant t \leqslant \leqslant c)$. Los cuatro puntos de intersección de estas rectas pertenecen al conjunto buscado. Cuando el «tiempo» t varía desde 0 hasta c, las rectas se mueven uniformemente y cada uno de sus puntos de intersección, de acuerdo con el lema, pasa cierto segmento. Los extremos de estos segmentos, correspondientes a $t = 0$ y $t = c$, están sobre las rectas l_1, l_2 y son los vértices del rectángulo. □

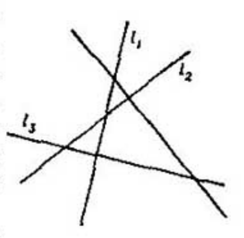




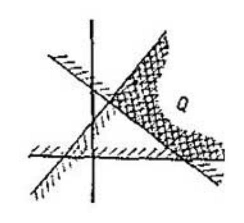
Ofreceremos el teorema general, que incluye los puntos B, C, I, J del alfabeto. Examinemos *el conjunto de puntos M, para los cuales*:

$$\lambda_1\rho(M, l_1) + \lambda_2\rho(m, l_2) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_n\rho(M, l_n) = \mu; \qquad (3)$$

aquí $l_1, l_2, \ldots, l_n$ son las rectas dadas, y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu$— los números dados.

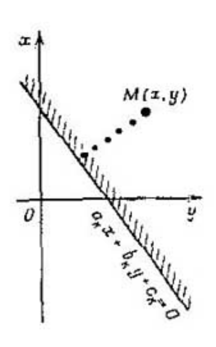


Es difícil describir por completo este conjunto para todo el plano. Sin embargo, como veremos ahora, en cada pedazo, en que las rectas l_1, l_2, ..., l_n dividen el plano, el conjunto (3) es, por regla general, una parte de cierta recta. Designemos una de estas partes por Q.



Teorema sobre la distancia hasta las rectas. *El conjunto de puntos que satisfacen a la condición* (3) *y pertenecen a Q, es o* 1) *la intersección de la parte Q con cierta recta (un rayo, un segmento, incluso una recta entera), o* 2) *todo el pedazo Q, o* 3) *un conjunto vacío.*

Habiendo comprendido cual es el conjunto que se obtiene en cada parte (como en el problema 1.3) hallaremos todo el conjunto incógnito. La demostración del problema la realizaremos con ayuda del método de coordenadas.



□ Supongamos, que queremos hallar el conjunto de puntos en una de las partes Q del plano, dividido por las rectas l_1, l_2, . . ., l_n. Esta parte del plano Q se puede representar como la intersección de n semiplanos con las rectas colindantes l_1, l_2, ..., l_n.

La ecuación $a_k x + b_k y + c_k = 0$ de la recta l_k se puede elegir de tal manera que en el semiplano necesario $a_k x + b_k y + c_k \geqslant 0$ y $a_k^2 + b_k^2 = 1$ (?), entonces para los puntos $M(x; y)$ de este semiplano $\rho(M, l_k) = a_k x + b_k y + c_k$.

Para anotar el valor de $\lambda_1\rho(M, l_1) + \lambda_2\rho(M, l_2) + \ldots + \lambda_n\rho(M, l_n)$ mediante coordenadas, hay que sumar varias

expresiones lineales tipo $\lambda_k a_k x + \lambda_k b_k y + \lambda_k c_k$. Como resultado la condición (3) se apunta como una ecuación lineal
$ax + by + c = 0$.

Siendo $a^2 + b^2 \neq 0$, es una recta. Siendo $a = b = 0$, es un plano o un conjunto vacío. □

Otra demostración de este teorema puede obtenerse reduciéndola con ayuda del problema 2.14 al teorema de los cuadrados de distancias ⟨?⟩.

2.19. a) Sea dado un triángulo regular *ABC*. Hallar el conjunto de puntos para los cuales la suma de las distancias hasta las rectas *AB*, *BC*, y *CA* son iguales al número dado $\mu > 0$. ↓

b) Sea dado un rectángulo *ABCD*. Hallar el conjunto de puntos para los cuales la suma de las distancias hasta las rectas *AB*, *BC*, *CD*, *DA* es igual al número dado μ.

2.20*. a) Tres rectas l_0, l_1, l_2 se cortan en un mismo punto, siendo el ángulo entre cada dos de ellas igual a 60°. Hallar el conjunto de puntos para los cuales
$\rho(M, l_0) = \rho(M, l_1) + \rho(M, l_2)$.

b) Sea dado un triángulo equilátero *ABC*. Hallar el conjunto de puntos *M*, para los cuales la distancia hasta una de las rectas *AB*, *BC*, *CA* sea igual a la semisuma de las distancias hasta las otras dos. ↓

Todo el alfabeto. El conjunto de puntos, que satisfacen cierta condición se representa de la siguiente manera: dentro de las llaves se escribe

inicialmente la letra empleada para designar «un punto arbitrario» del conjunto (en nuestro caso, por regla general, la letra M, pero puede ser cualquier otra); después se ponen dos puntos, y detrás se escribe la condición, con la ayuda de la cual se destaca el conjunto de puntos que nos hace falta.

Apuntemos ahora brevemente todos los conjuntos del alfabeto:

A. $\{M : |MA| = |MB|\}$.
B. $\{M : \rho(M, l_1) = \rho(M, l_2)\}$.
C. $\{M : \rho(M, l) = h\}$.
D. $\{M : |MO| = r\}$.
E. $\{M : A\widehat{MB} = \varphi\}$.
F. $\{M : |AM|^2 - |MB|^2 = c\}$.
G. $\{M : |AM|^2 + |MB|^2 = c\}$.
H. $\{M : |AM|/|MB| = k\}$.
I. $\{M : \rho(M, l_1)/\rho(M, l_2) = k\}$.
J. $\{M : \rho(M, l_1) + \rho(M, l_2) = c\}$.

Recordemos que todos los puntos del alfabeto, aparte de E, los hemos dividido en dos grupos
A, D, F, G, H y B, C, I, J.

El primer grupo son casos particulares del conjunto

$$\{M : \lambda_1 |MA_1|^2 + \lambda_2 |MA_2|^2 + \dots + \lambda_n |MA_n|^2 = \mu\},$$

y el segundo, casos particulares del conjunto

$$\{M : \lambda_1 + \rho(M, l_1) + \lambda_2\rho(M, l_2) + \dots + \lambda_n\rho(M, l_n) = \mu\}.$$

En el § 6 vamos a complementar el alfabeto con cuatro letras más



K. $\{M : |MA| + |MB| =$
$= c\}$.

L. $\{M : ||MA| - |MB|| =$
$= c\}$.

M. $\{M : |MA| = \rho(M, l)\}$.

N. $\{M : |MA|/\rho(M, l) = c\}$.

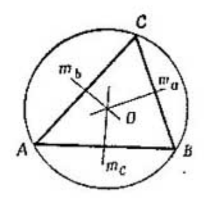
Estos conjuntos son elipses, hipérbolas, parábolas, las cuales se agrupan también, naturalmente, en un grupo: curvas de segundo orden.

3 Combinaciones lógicas

Aquí hay reunidos diversos problemas, en los que toman parte, como regla, combinaciones de varias estipulaciones geométricas. Resolviendo estos problemas, aprenderemos a clasificar los puntos, y a imaginarnos los vínculos entre las condiciones como operaciones que se realizan respecto a los conjuntos.

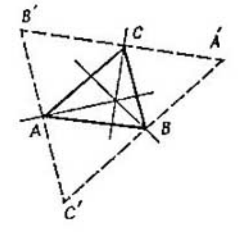
Por un punto. En los primeros problemas trataremos un tema tradicional de la geometría; mediante manipulaciones simples con los conjuntos del alfabeto demostraremos el teorema sobre los puntos notables del triángulo. Toda la lógica de los razonamientos se reducirá, por lo común, al empleo del carácter transitivo de la igualdad: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

3.1. En el triángulo ABC las mediatrices de los lados (perpendiculares en sus puntos medios) se intersecan en cierto punto (*centro de la circunferencia circunscrita al triángulo*).



□ Las mediatrices m_c y m_a de los lados AB y BC se cortan, evidentemente, en cierto punto O. Como el punto O pertenece a la mediatriz m_c, de acuerdo con A (§ 2) tiene lugar la igualdad $|OA| = |OB|$. Así mismo, por cuanto O pertenece a la mediatriz m_a resulta que $|OB| = |OC|$. Consiguientemente, $|OA| = |OC|$ por lo tanto, el punto O pertenece a la mediatriz m_b del lado AC.

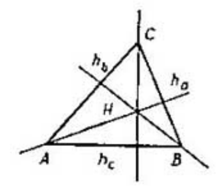
Como resultado hemos demostrado que las tres mediatrices se encuentran en el punto O. □



3.2. Las tres alturas del triángulo ABC se intersecan en un punto. (Este punto se llama *ortocentro del triángulo*.)

□ Tracemos por cada vértice del triángulo una recta paralela al lado opuesto a dicho vértice. Estas rectas forman un triángulo nuevo $A'B'C'$, en el cual A, B, C son los puntos medios de los lados, y las alturas del triángulo ABC pertenecen a las mediatrices de los lados $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Por consiguiente, de acuerdo con 3.1 se encontrarán en un mismo punto. □

Ofrecemos la segunda demostración de 3.2, parecida a la demostración de la afirmación 3.1.



□ Imaginémonos cada altura como un conjunto de puntos que satisfacen a cierta condición. Utilicemos para esto el punto F del alfabeto.

Sabemos que el conjunto
$\{M: |MA|^2 - |MB|^2 = d\}$
es una perpendicular a la recta AB. Escojamos d de modo que esta recta contenga el vértice C. Para esto hay que tomar $d = |CA|^2 - |CB|^2$. De esta manera, la recta

$$h_c = \{M: |MA|^2 - |MB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2\},$$

contiene la altura del triángulo, bajada desde el vértice C.

Por analogía se pueden representar las rectas, que contienen las otras dos alturas del triángulo:

$$h_a = \{M: |MB|^2 - |MC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2\},$$
$$h_b = \{M: |MC|^2 - |MA|^2 = |BC|^2 - |BA|^2\}.$$

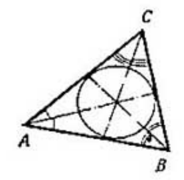
Supongamos que las dos primeras rectas h_c y h_a se cortan en el punto H, entonces para éste se cumplen simultáneamente las igualdades

$$|HA|^2 - |HB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2$$
$$|HB|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |CA|^2.$$

Sumando estas dos igualdades obtenemos

$$|HA|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |CB|^2.$$

Es decir, el punto H también pertenece a la tercera recta h_b. □



3.3. Las tres bisectrices del triángulo ABC se intersecan en un pun-

to (*centro de la circunferencia inscrita al triángulo*).

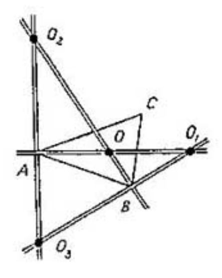
□ Supongamos que a, b y c son rectas a las que pertenecen los lados del triángulo. Es evidente que las bisectrices l_a y l_b de sus ángulos A y B se encontrarán en cierto punto O (dentro del triángulo). Para este punto O se cumplen las igualdades

$$\rho(O, b) = \rho(O, c)$$

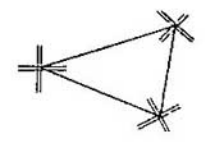
y

$$\rho(O, a) = \rho(O, c).$$

Por consiguiente, $\rho(O, b) = \rho(O, a)$ y el punto O también pertenecerá a la bisectriz l_c del ángulo C del triángulo. □

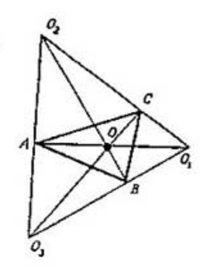


Observación. El conjunto de puntos M del plano para los cuales $\rho(M, c) = \rho(M, b)$ y $\rho(M, a) = \rho(M, c)$ consta de cuatro puntos — O, O_1, O_2, O_3 — de intersección de dos «cruces de bisectrices». Razonando de la misma forma que durante la solución del problema 3.3 obtenemos que también la tercera «cruz» (de las bisectrices de las rectas a y b) pasa por dichos puntos.



De ahí obtenemos que las seis bisectrices de los ángulos internos y externos del triángulo se encuentran de tres en tres en los cuatro puntos. Uno de estos puntos es el centro de la circunferencia inscrita, y los otros tres, los centros de las llamadas *circunferencias exinscritas*.

Señalemos, que si en un triángulo acutángulo arbitrario $O_1O_2O_3$ los puntos A, B, C son los pies de las alturas, entonces O_1, O_2, O_3 son los exicentros, o sea los puntos que equidistan de los tres lados (de un lado y las prolongaciones de los otros dos) del triángulo ABC. Al mismo tiempo, las alturas del triángulo $O_1O_2O_3$ sirven de bisectrices del triángulo ABC.

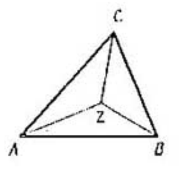


3.4. Las medianas del triángulo se cortan en un punto (*centro de gravedad del triángulo*).

Este teorema se puede demostrar de distintas maneras.

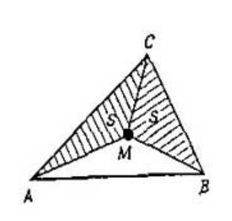
La primera demostración que expondremos explica la denominación «centro de gravedad del triángulo».

□ Coloquemos en los vértices del triángulo ABC tres cargas G_A, G_B, G_C de igual masa, digamos de 1 g, y hallemos la posición de sus centros de gravedad. El centro de gravedad de dos cargas —G_A y G_B— se encuentran en el punto medio del segmento AB; o sea, el centro de gravedad Z pertenece a la mediana correspondiente. De la misma forma se puede mostrar que Z pertenece a las dos otras medianas; por consiguiente, las tres medianas se encuentran en el punto Z. □



No obstante, ofreceremos también la demostración en el espíritu de las tres anteriores.

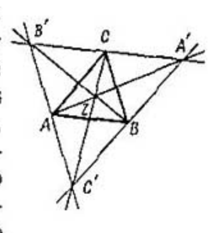
□ Sea un triángulo ABC. Los puntos de las medianas del triángulo trazadas desde los vértices A, B, C, satisfacen las condiciones siguientes (correspondientemente) (véase 2.17):

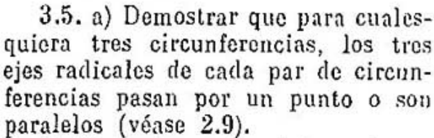


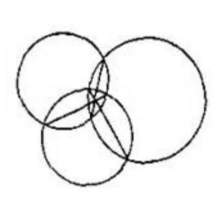
$$S_{AMB} = S_{CMA},$$
$$S_{AMB} = S_{BMC}, \quad S_{BMC} = S_{CMA} \qquad (1)$$

Está claro que de las dos primeras condiciones se deduce la tercera y, por consiguiente, las medianas se intersecan en un punto Z. □

Observación. El conjunto de puntos que satisfacen las condiciones (1), son (de acuerdo con 2.17) un par de rectas: «cruces de medianas». De esta forma, tres conjuntos semejantes se cortan en cuatro puntos: Z, A', B', C'. Consignaremos que el triángulo $A'B'C'$ es justamente el triángulo $A'B'C'$ que examinamos en la primera demostración del teorema sobre las alturas 3.2.



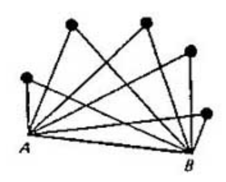

3.5. a) Demostrar que para cualesquiera tres circunferencias, los tres ejes radicales de cada par de circunferencias pasan por un punto o son paralelos (véase 2.9).



b) Demostrar que, si tres circunferencias se cortan de par en par, las tres cuerdas comunes de cada par de circunferencias (o sus prolongaciones) pasan por un punto o son paralelas. ↓

3.6. («Punto de Torricelli».) Demostrar que en un triángulo ABC cuyos

ángulos sean menores de 120° existe un punto T, desde el cual todos los lados se ven con un mismo ángulo (o sea, un punto tal, que $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA}$).



3.7. Examinemos todos los triángulos posibles cuya base es AB y el ángulo del vértice opuesto es igual a φ. Hallar el conjunto:

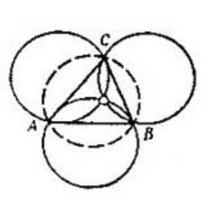
a) de puntos donde se cortan las medianas;

b) de puntos donde se encuentran las bisectrices; ↓

c) de puntos donde se intersecan las alturas. ↓

3.8. a) Tres rectas a, b, c, que se cortan de par en par y pasan correspondientemente por tres puntos dados A, B, C, giran con igual velocidad angular ω. Demostrar que en cierto momento estas rectas pasan por un punto. ↓

b) Demostrar que tres circunferencias, simétricas a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC con relación a las rectas AB, BC y CA, pasan por un punto, el ortocentro del triángulo ABC. ↓



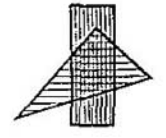
3.9. («Teorema de Ceva»). En los lados AB, BC, CA de un triángulo se han elegido los puntos C_1, A_1, B_1. Demostrar, que los segmentos AA_1, BB_1, CC_1 se intersecan en un punto

sólo cuando se cumple la condición:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1.$$

3.10. Desde los puntos C_1, A_1, B_1 que se hallan correspondientemente sobre los lados AB, BC, CA del triángulo dado ABC, se han trazado perpendiculares a dichos lados. Demostrar que estos tres perpendiculares se encontrarán en un punto únicamente cuando se cumpla la condición

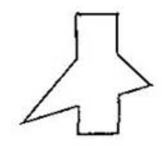
$$|AC_1|^2+|BA_1|^2+|CB_1|^2=$$
$$=|AB_1|^2+|BC_1|^2+|CA_1|^2. \downarrow$$



Intersección y reunión. Vamos a destacar las operaciones principales que empleamos constantemente.

Sean dados dos o varios conjuntos de puntos. *Intersección* de estos conjuntos se llama el lugar geométrico de todos los puntos que pertenecen simultáneamente a todos los conjuntos dados. *Reunión* de estos conjuntos se llama el lugar geométrico de todos los puntos que pertenecen, por lo menos, a uno de ellos.





Si en el problema se exigía hallar los puntos, que satisfacían **simultáneamente a varias condiciones**, procedíamos así: hallábamos el conjunto de puntos, que satisfacían por separado a cada condición y tomábamos la intersección de estos conjuntos. Con una situación semejante nos encontramos también en problemas de álgebra:

el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0 \end{cases}$$

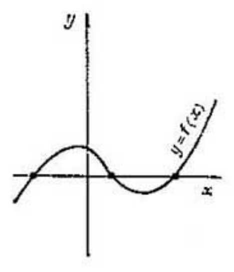
en esencia, es la intersección de los conjuntos de soluciones por separado de las ecuaciones que constituyen este sistema.

Si en el problema se exige hallar los puntos, que satisfacen **por lo menos a una condición** de entre varias, es claro que hay que hallar los conjuntos de puntos, que satisfacen por separado a cada una de las condiciones y tomar la reunión de estos conjuntos. Justamente así procedemos resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, cuyo primer miembro se descompone en factores

$$f(x) = f_1(x)\ f_2(x),$$

hallamos el conjunto de soluciones de cada ecuación $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ y tomamos su reunión.

También despierta asociaciones algebraicas otra noción con la cual nos encontramos aquí: *la partición*. Para resolver la desigualdad $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$, comúnmente es suficiente resolver la correspondiente ecuación $f(x) = 0$. Los puntos obtenidos parten el dominio de definición de la función f (segmento o recta) en pedazos, en cada uno de los cuales la función conserva su signo. Igualmente, los conjuntos de puntos del



plano para los cuales están cumplidas unas u otras desigualdades, por lo común son dominios, limitados por líneas, en las que se cumplen las igualdades correspondientes. Hemos visto muchos ejemplos sencillos que muestran esto en el § 2.

En el siguiente problema chocaremos con particiones y combinaciones de conjuntos más complejas.

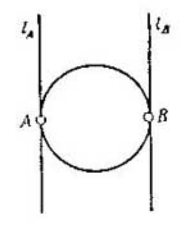
3.11. Supongamos que hay dos puntos A y B en un plano. Hallar el conjunto de puntos M, para los cuales el triángulo AMB sea:

a) rectángulo;

b) acutángulo;

c) obtusángulo.

□ a) El triángulo AMB es rectángulo, si se cumple una de las tres condiciones: 1) $\widehat{AMB} = 90°$, 2) $\widehat{BAM} = 90°$, 3) $\widehat{ABM} = 90°$.

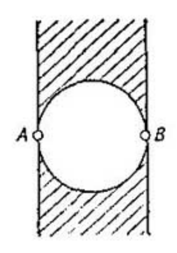


El conjunto buscado es por eso la reunión de los tres conjuntos siguientes: 1) una circunferencia de diámetro AB, 2) una recta l_A que pasa por el punto A perpendicularmente al segmento AB, 3) una recta l_B que pasa por el punto B y es perpendicular al segmento AB.

De esta reunión es necesario excluir los puntos A y B, que están sobre la recta AB (pues conllevan a la «degeneración» del triángulo AMB). □

□ b) El triángulo AMB es acutángulo, si al mismo tiempo se cum-

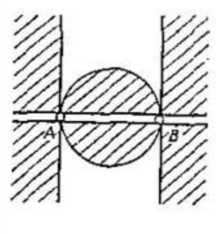
plen tres condiciones: 1) $\widehat{AMB} < 90°$, 2) $\widehat{BAM} < 90°$; 3) $\widehat{ABM} < 90°$.



El conjunto buscado es por eso la intersección de los tres conjuntos siguientes: 1) la parte exterior de un círculo de diámetro AB (véase § 2 D); 2) un semiplano sin la recta colindante l_A, que contiene el punto B; 3) un semiplano sin la recta colindante l_B, que contiene el punto A.

Su intersección es una franja entre las rectas l_A y l_B, de la cual se ha excluido un círculo de diámetro AB. □

□ c) Observemos que cada punto M del plano (que no está sobre la recta AB), satisface a una de las tres condiciones: a) el ΔAMB es rectángulo, o bien b) el ΔAMB es acutángulo, o por último c) el ΔAMB resulta obtusángulo; además estas condiciones se excluyen mutuamente. Por eso, al conjunto c) tienen que pertenecerle todos aquellos puntos del plano que no corresponden a a), ni a b). Este conjunto es la reunión del círculo y de dos semiplanos (sin la recta AB). □

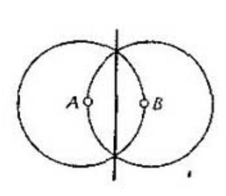


3.12. En el plano hay dados dos puntos A y B. Hallar el conjunto de puntos M tales que:

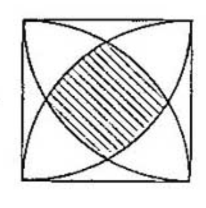
a) el triángulo AMB sea isósceles;

b) en el triángulo AMB el lado AB sea el mayor;

c) en el triángulo AMB el lado AM sea el mayor.



3.13. En el plano se da un cuadrado cuyos lados son de longitud 1. Demostrar que cualquier punto en el plano que diste no más de 1, con respecto a cada vértice de este cuadrado, se encontrará a una distancia no menor de 1/8 respecto a cada lado del mismo.

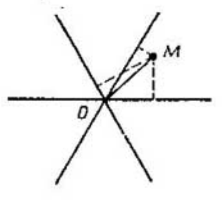


☐ El conjunto de puntos M que están alejados a una distancia no mayor de 1 de cada uno de los cuatro vértices, es la intersección de cuatro círculos de radio 1 trazados desde dichos vértices del cuadrado. Esto es un «cuadrilátero», limitado por cuatro arcos; su vértice está a la distancia de $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ del lado más cercano. Comprobemos, que estas cifras son mayores que 1/8:

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{7}{8}>\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{49}{16}>3.$$

Ahora está claro que todos los puntos de nuestro conjunto están a más de 1/8 de distancia de los lados del cuadrado. ☐

3.14. Por el punto O del plano hay trazadas tres rectas, las cuales parten este plano en seis ángulos congruentes. Demostrar que si la distancia desde el punto M hasta cada recta es menor de 1, la distancia $|OM|$ será menor de 7/6.

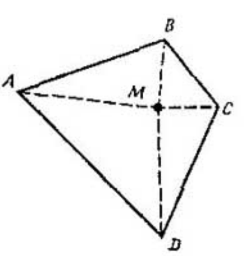


3.15. Sea dado un cuadrado $ABCD$. Hallar el conjunto de puntos más cercanos de la recta AB que de las rectas BC, CD y DA.

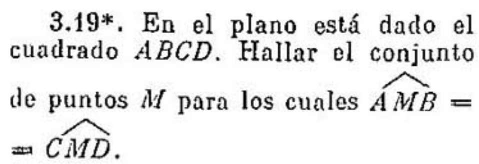
3.16. Sea dado un triángulo ABC. Hallar en el plano un conjunto de puntos M de modo que el área de cada uno de los triángulos AMB, BMC, CMA sea menor que el área del triángulo ABC.

3.17. Sobre los lados de un cuadrilátero convexo arbitrario $ABCD$, empleándolos como diámetros, se trazan círculos. Demostrar que éstos tapan todo el tetrágono.

□ Supongamos que dentro del tetrágono existe un punto M, situado fuera de los círculos. Entonces, de acuerdo con § 2, E, todos los ángulos AMB, BMC, CMD y DMA son agudos y su suma será menor de 360°, lo cual es imposible. □



3.18*. Una parcela de bosque tiene la forma de polígono convexo, siendo su área S y su perímetro p. Demostrar que dentro del bosque se puede señalar un punto que dista más de S/p respecto al lindero.



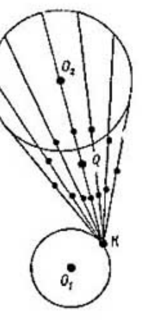
3.19*. En el plano está dado el cuadrado $ABCD$. Hallar el conjunto de puntos M para los cuales $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$.

En los problemas siguientes tendremos que examinar la reunión de infinidad de conjuntos.

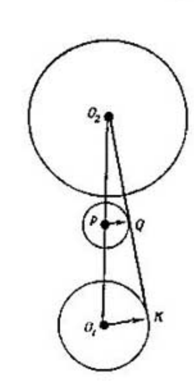
3.20. a) Sea dado un punto O. Examinemos la familia de circunferencias de radio de 3 cm, cuyos centros están a 5 cm de distancia del punto O, y una familia de circunferencias de radio 5 cm, cuyos centros están a 3 cm de distancia del punto O. Demostrar que la reunión de circunferencias de la primera familia coincide con la reunión de la segunda familia.

b) Hallar el conjunto de puntos de segmentos en los cuales un extremo está sobre una de las circunferencias dadas, y el otro, sobre la segunda.

□ b) Designemos los radios de las circunferencias dadas por r_1 y r_2, y sus centros, por O_1 y O_2, respectivamente. Fijemos primero algún punto K de la primera circunferencia y hallemos el conjunto de puntos medios de los segmentos un extremo de los cuales coincide con el punto K. Es evidente que dicho conjunto será una circunferencia de radio $r_2/2$ con centro en el punto medio del segmento KO_2. (Esta circunferencia se obtiene por la homotecia de la circunferencia (O_2, r_2) con coeficiente de 1/2 y centro en K.) Señalemos, que el punto Q está a una distancia de $r_1/2$ del punto P, que es el punto medio del segmento O_1O_2.



Si ahora empezamos a mover el punto K por la circunferencia (O_1, r_1), entonces el punto Q se trasladará por la circunferencia de radio $r_1/2$ con centro en el punto P. De esta manera, el conjunto buscado es una reunión de todas las circunferencias de radio $r_2/2$, cuyos centros están sobre la circunferencia de radio $r_1/2$ cuyo centro es el punto P.

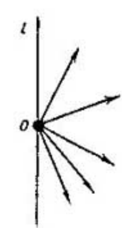


Qué resulta ser esta reunión de infinidad de circunferencias, se muestra en el dibujo.



Así pues, el conjunto de todos los puntos que satisfacen la condición del problema, representa en sí un anillo cuyo radio exterior es $(r_1 + r_2)/$ $/2$ y el interior, $|r_1 - r_2|/2$. En caso cuando $(r_1 = r_2)$, este conjunto se transforma en un círculo. □

3.21. Desde el punto O, situado sobre la recta l, que limita el semiplano, hacia el interior de este semiplano están trazados n vectores de longitud igual a la unidad. Demostrar que si n es impar, la longitud de la suma de estos vectores no es menor de 1. ↓



3.22. A través de la aldea A, rodeada por todas partes de prados, pasa un camino recto. Una persona puede ir por el camino a velocidad de 5 km/h mientras que por el prado, a 2 km/h. Trazar el conjunto de puntos hasta los cuales podría llegar desde A en una hora.

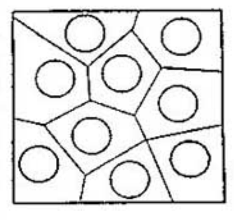


Problema sobre el queso.

3.23. Sea un pedazo cuadrado de queso con agujeros. ¿Siempre se podrá cortar éste en pedazos convexos de forma que en cada pedazo haya justamente un agujero?

Desde el punto de vista de su formulación matemática, este problema se presenta del siguiente modo.

Dentro de un cuadrado hay situados, de dos en dos, unos cuantos círculos que no se cortan entre sí. ¿Se puede partir este cuadrado en polígonos convexos de forma que en cada uno de ellos resulte justamente un círculo?



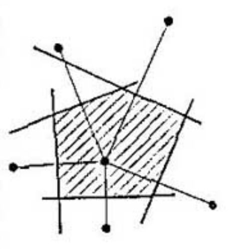
□ La respuesta resulta siempre positiva. Para cualquier ejemplo con pequeña cantidad de círculos no es difícil cortar el cuadrado en polígonos convexos. Mas para ofrecer una demostración completa, tenemos que señalar un método de partición del cuadrado que sirva para cualquier cantidad y situación de los círculos.

Examinemos primero un problema más simple: *consideraremos que los radios de todos los círculos son iguales.* Se puede proponer el siguiente método de partición del cuadrado. Al principio vamos a describirlo brevemente, con una frase. Adheriremos a cada círculo aquellos puntos del cuadrado que están situados más cerca de dicho círculo que de todos los demás; así

se obtendrán justamente los polígonos convexos buscados (?).

Expliquemos esto más detalladamente. Señalemos los centros C_1, C_2, ..., C_n de los círculos dados. Sea C_i uno de estos centros. Hallemos el conjunto de puntos, cuyas distancias hasta C_i no sean mayores que hasta los demás centros C_j. El conjunto de puntos del plano más cercanos de C_i que de C_j (para cierto j) es un semiplano limitado por la mediatriz del segmento C_iC_j (A). A nosotros nos interesan los puntos que están más cerca de C_i que de todos los demás centros, o sea, los puntos que pertenecen a los semiplanos mencionados, pero que corresponden a diferentes C_j ($j \neq i$). El conjunto de todos estos puntos, es decir, la intersección de todos los $(n-1)$ semiplanos, será, claro está, un polígono convexo (?). Puesto que cada semiplano contiene el punto C_i así como además el círculo completo con el centro C_i (¡pues los círculos con los centros C_i y C_j no se cortan y tienen un mismo radio!), la intersección también contendrá dicho círculo.



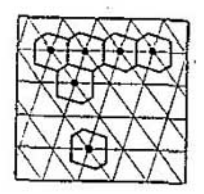


Un polígono así

$\{M\colon |MC_i| \leqslant |MC_j|$ para todos $j \neq i\}$.

corresponde a cada centro C_i. Es evidente que estos polígonos tapan todo el cuadrado y no tienen puntos

internos comunes: para conocer a que conjunto concretamente pertenece el punto M, cabe ahora preguntar «¿Cuál de los centros C_i está más cerca del punto M?». Si hay dos o unos cuantos centros «más cercanos al punto M», entonces M cae sobre una de las medianas, o sea, sobre el límite de los polígonos, sobre la línea de partición. De esta manera, el cuadrado se divide en polígonos convexos, cada uno de los cuales contiene justamente un círculo.



Como ejemplo bonito examinemos el caso cuando los centros de los círculos están situados en los nudos de una red, constituida por paralelogramos iguales.

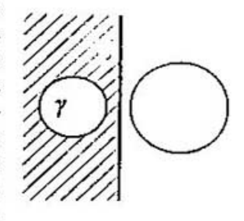
Nuestro método de división se puede describir de la forma siguiente.

En todos los paralelogramos de la red tracemos las diagonales menores. Como resultado, obtendremos una red con los mismos nudos, formada de triángulos acutángulos iguales. Dentro de cada triángulo tracemos las mediatrices. Los hexágonos obtenidos forman la partición necesaria del cuadrado.

Así pues, hemos aclarado el problema 3.23 para el caso cuando todos los círculos tienen radios iguales.

En el caso general, cuando *los radios de los círculos son distintos*, el cuadrado se puede dividir de la forma siguiente. Desde cada punto situado fuera de los círculos dados, se pueden trazar las tangentes a todas las circunferencias. El conjunto correspondien-

te al círculo dado γ, estará constituido por los puntos del mismo y por los puntos para los cuales la longitud de la tangente a la circunferencia γ es menor que la de la tangente a las demás circunferencias. Este conjunto es la intersección de varios semicírculos que contienen el círculo γ; como bordes de estos semicírculos sirven los ejes radicales de la circunferencia γ y de alguna de las demás circunferencias (véanse los problemas 2.9 y 3.5). Así pues, todo el cuadrado estará representado en forma de una reunión de polígonos convexos que no tienen puntos comunes internos, y cada uno de los polígonos contendrá su círculo. □

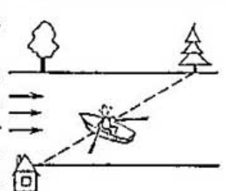


4 Máximo y mínimo

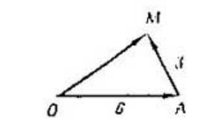
Este parágrafo comienza por problemas muy simples, en los cuales hay que hallar el valor máximo o mínimo que puede adquirir una u otra magnitud, y termina con complicados problemas de investigación. Los problemas sobre máximo y mínimo se pueden, por regla general, reducir a la investigación de cierta función dada en forma analítica. Pero aquí hemos reunido, en lo fundamental, problemas en los que razonamientos geométricos permiten alcanzar más rápido el objetivo. Usted verá que durante la solución de semejantes problemas se emplean diferentes conjuntos de puntos.

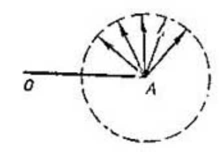
4.1. ¿En qué ángulo respecto a la orilla hay que dirigir la lancha para que durante el tiempo necesario para pasar el río se arrastre lo menos posible por la corriente, si la velocidad de ésta es de 6 km/h, mientras que la velocidad de la lancha en agua estancada, de 3 km/h?

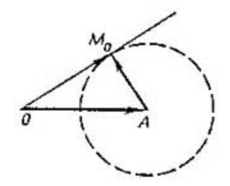
□ *Respuesta.* En un ángulo de 60°.



Tenemos que dirigir la lancha de modo que su velocidad absoluta (la velocidad respecto a las orillas) constituya el mayor ángulo posible con la orilla (?) (véase el dibujo). Sean el vector $\overrightarrow{OA}$ la velocidad de la corriente del río, y $\overrightarrow{AM}$, la velocidad de la lancha con relación al agua. La suma $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$ nos da el valor absoluto de la velocidad de la lancha (la velocidad respecto a la orilla). La longitud del vector $\overrightarrow{AM}$ es igual a 3, y podemos dirigirlo hacia cualquier lado. El conjunto de las posibles posiciones del punto M es la circunferencia de radio 3 con centro en el punto A. Está claro que entre todos los vectores $\overrightarrow{OM}$, el ángulo mayor con relación a la orilla lo forma $\overrightarrow{OM_0}$, dirigido por la tangente a la circunferencia.



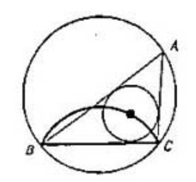


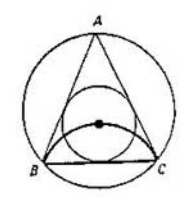


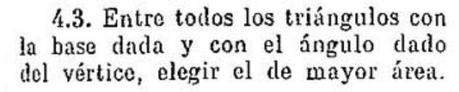
Obtenemos un triángulo rectángulo en el cual uno de sus catetos es la mitad de la hipotenusa. En semejante triángulo, el ángulo buscado es igual a 60°. □

4.2. Entre los triángulos con $\hat{A} = \varphi$ y la base dada BC, escoger el triángulo para el cual el radio de la circunferencia inscrita sea el mayor.

□ Examinemos los puntos A que están a un lado de la recta BC, para los cuales $B\hat{A}C = \varphi$. El conjunto de centros de las circunferencias inscritas en el triángulo ABC es el arco de la circunferencia con los extremos B y C (véase 3.7., *b*). Es evidente que el radio mayor de la circunferencia inscrita será el del triángulo isósceles. □

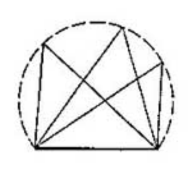






4.3. Entre todos los triángulos con la base dada y con el ángulo dado del vértice, elegir el de mayor área.

4.4. Por dos caminos mutuamente perpendiculares van dos transeúntes: uno a la velocidad u, y el otro a la velocidad v. Cuando el primero cruzaba el camino del segundo, a éste aún le quedaban d kilómetros para llegar a la intersección. ¿Cuál será la distancia mínima que separa los transeúntes? ↓



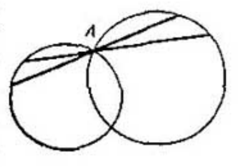
4.5. Por el pueblo A, rodeado de praderas, pasa un camino recto. Una persona puede ir por el camino a una velocidad de 5 km/h, y por la pradera, a una velocidad de 2 km/h (en cualquier dirección).



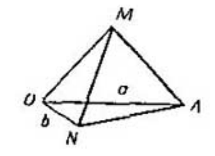
¿Qué ruta tendrá que elegir la persona para llegar cuanto antes del pueblo A a la casita B, que está a 13 km de éste y a 5 km del camino?

4.6. Sean dadas dos circunferencias intersecadas. Trazar por el punto

donde se cortan A una recta de modo que la distancia entre los puntos (diferentes a A) de intersección de ésta con las circunferencias sea la mayor. ↓



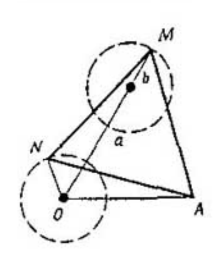
4.7. En el plano hay un punto O. Se exige que un vértice del triángulo equilátero esté a la distancia a del punto O, y otro, a la distancia b. ¿A qué distancia máxima del punto O puede estar el tercer vértice?



□ *Respuesta.* $a + b$. Sea AMN el triángulo equilátero, para el cual $|OA| = a$, $|ON| = b$. Para responder a la pregunta formulada en el problema, se pueden examinar solamente los triángulos con el vértice en un punto fijado A, ya que girando el triángulo, como si fuera un conjunto rígido, alrededor del punto O no cambian ninguna de las distancias. O sea, consideramos que el punto A es un punto fijo situado a la distancia a del punto O, y que N recorre la circunferencia de radio b con centro en O. ¿Qué posición puede ocupar el punto M? La respuesta fue hallada en el problema 1.6: M se encuentra sobre la circunferencia obtenida de la dada, virándola en 60° alrededor del punto A[1]). Está claro que el centro O' de la circunferencia virada dista a

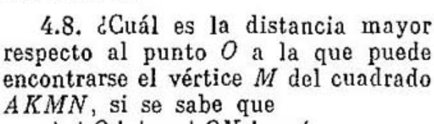
---

[1]) Se puede tomar cualesquiera circunferencias obtenidas girando en sentido horario y antihorario: ellas estarán a la misma distancia de O.



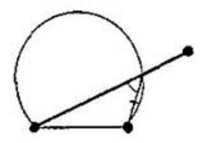
respecto al punto O (ya que $\Delta OO'A$ es equilátero). El radio de la circunferencia virada, lo mismo que el de la dada, es igual a b. Por consiguiente, la mayor distancia desde O hasta el tercer vértice M resulta $a + b$.□

De este problema se deduce un corolario curioso: la distancia desde cualquier punto del plano hasta un vértice de un triángulo equilátero, no es mayor que la suma de las distancias desde dicho punto hasta los otros dos vértices.



4.8. ¿Cuál es la distancia mayor respecto al punto O a la que puede encontrarse el vértice M del cuadrado $AKMN$, si se sabe que

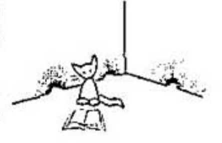
a) $|OA| = |ON| = 1$;
b) $|OA| = a$, $|ON| = b$.



4.9. Entre todos los triángulos para los que se conoce la base y el ángulo del vértice, elegir el triángulo de mayor perímetro. ↓

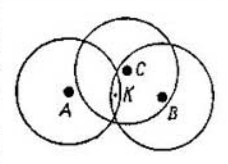
¿Dónde poner el punto?

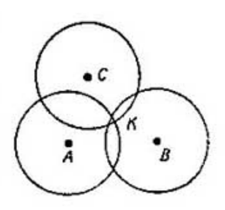
4.10. El ratoncito tiene tres salidas de su ratonera situados en los puntos A, B y C que el gato conoce. ¿Dónde tiene que sentarse el gato para encontrarse a la menor distancia posible de la salida más lejana?



□ Examinemos círculos de un mismo radio r trazados desde los puntos A, B y C. El punto buscado K, es decir la posición del gato, se deter-

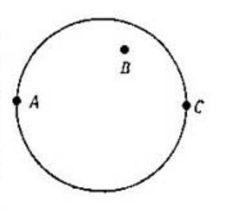
mina de la manera siguiente. Hay que hallar el radio menor r_0, para el cual en estos círculos aparece un punto común: éste será el punto buscado K. En realidad, si M es otro punto, entonces estará fuera de uno de los círculos, y por eso la distancia hasta uno de los vértices resultará mayor que r_0.





En el caso de un triángulo acutángulo ABC, el punto K es el centro de la circunferencia circunscrita, y en el caso del triángulo rectángulo u obtusángulo, el punto K es el punto medio del lado mayor. □

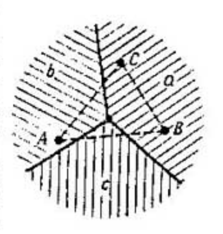
□ El punto K se puede hallar también del modo siguiente ⟨?⟩. Examinemos el círculo de menor radio que contiene los tres puntos. Entonces el punto K resultará ser su centro. □



Daremos otro enfoque a la solución del problema 4.10.

□ Dividamos el plano en tres conjuntos:

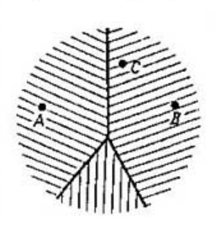
a) $\{M: |MA| \geqslant |MB|$ y $|MA| \geqslant |MC|\}$,
b) $\{M: |MB| \geqslant |MA|$ y $|MB| \geqslant |MC|\}$,
c) $\{M: |MC| \geqslant |MB|$ y $|MC| \geqslant |MA|\}$.



Son tres ángulos cuyos lados representarán las mediatrices de los lados del triángulo ABC. Estando el gato M en el ángulo a), el vértice más lejano con respecto a él será el A: estando en el ángulo b), el B; estando en el ángulo c), el C.

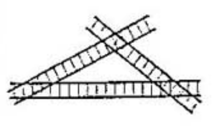
Si el triángulo ABC es acutángulo, en cada uno de los tres casos al gato

le conviene estar sentado en el vértice del ángulo correspondiente (*a*), *b*) o *c*) o sea, deberá sentarse en el centro de la circunferencia circunscrita.



Si el triángulo *ABC* es rectángulo u obtusángulo, entonces es evidente que al gato le convendrá estar sentado en el punto medio del lado mayor del triángulo. □

4.11. En una parte del bosque, limitada por tres ferrocarriles rectos, vive un oso. ¿En qué punto del bosque debe hacerse el oso la guarida para encontrarse a la mayor distancia posible del ferrocarril más cercano?

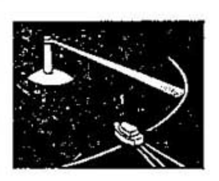


4.12*. a) En un lago redondo viven tres cocodrilos. ¿Dónde deben situarse para que la mayor de las distancias desde cualquier punto del lago hasta el cocodrilo más cercano sea la menor posible?

b) El mismo problema para cuatro cocodrilos.

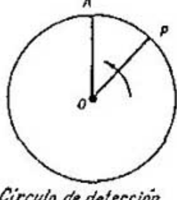
Problema sobre una lancha motora.

4.13*. En una isla pequeña *O* hay un faro, cuyo haz ilumina un radio de la superficie marítima hasta la distancia $a = 1$ km. El faro gira uniformemente alrededor de un eje vertical y da una vuelta durante $T = 1$ minuto. Una lancha motora que puede desarrollar una velocidad v, tiene que acercarse a la isla sin ser advertida (sin que le alcance el haz



del faro). ¿Cuál es el menor valor posible de v para conseguir eso?

□ Denominaremos el círculo de radio a, el iluminado por el faro, «círculo de detección». Está claro que para la lancha motora lo más conveniente es entrar en dicho círculo en un punto A tal, por el cual acabe de pasar el haz del faro.



Círculo de detección

Si la lancha motora va hacia la isla en línea recta, llegará a ella dentro del tiempo a/v; para que el haz del faro no la alcance en este tiempo es necesario que el haz no tenga tiempo para dar una vuelta entera, o sea, que se cumpla la desigualdad $a/v < T$, de donde

$$v > a/T = 60 \text{ km/h}.$$

De esta manera hemos demostrado que si $v > 60$ km/h, la lancha motora podrá llegar a la isla sin ser vista. Pero, evidentemente, de aquí no se deduce que 60 km/h sea la menor velocidad que permita conseguir esto, o sea, que la mejor elección del capitán de la lancha motora resulte ser la de ir por el radio AO.

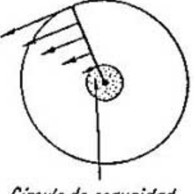
En realidad, la cuestión es otra, como veremos[1]).

Observemos que las velocidades lineales a las que se mueven diferentes

---

[1]) Antes de seguir leyendo la solución, trate Usted de imaginar algún camino de la lancha por el cual ésta puede penetrar en la isla con menor valor de v.

puntos del haz OP del faro son distintas: cuanto más cerca está el punto del centro O, menor es su velocidad. La velocidad angular del haz es igual a $2\pi/T$. Por la circunferencia de radio $r = vT/2\pi$ la lancha puede avanzar tranquilamente ante el haz, ya que la velocidad de la lancha aquí es igual a la velocidad lineal del punto correspondiente del haz. Fuera del círculo de radio r con centro en O la velocidad del haz es mayor, y dentro de este círculo (lo llamaremos «círculo de seguridad») la velocidad del haz es menor de v.

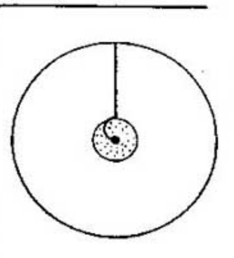

Círculo de seguridad

Si la lancha consigue llegar sin contratiempos hasta algún punto del círculo de seguridad, más adelante podrá llegar a ciencia cierta, a la isla sin ser detectada. Uno de los caminos posibles dentro del círculo de seguridad, es la circunferencia de radio $r/2$: si la lancha K va a desplazarse por esta circunferencia a la velocidad v, entonces el segmento KO girará alrededor de O a la misma velocidad angular a la que se movería la lancha por la circunferencia de radio r, o sea, a la misma que el rayo del proyector (véase el problema 0.3); por lo tanto la lancha no será alcanzada por este haz.

¡Así pues, el objetivo principal de la lancha es llegar al círculo de seguridad!

Si la lancha navega hasta el círculo de seguridad en línea recta, por el

radio AO, después marcha frente al haz del proyector, podrá cumplir su tarea si

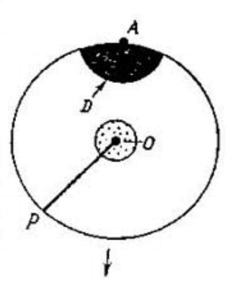


$$v > \frac{1}{1+(1/2\pi)}\frac{a}{T} \approx 0{,}862\frac{a}{T} =$$

$$= 51{,}7 \text{ km/h}.$$

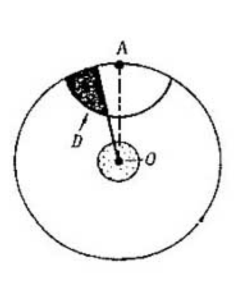
Hemos mejorado un poco nuestra evaluación para la velocidad de la lancha. Pero resulta que tampoco esto es el límite.

Hallemos ahora el valor menor de la velocidad v a la cual la lancha podrá acercarse a la isla sin ser advertida.



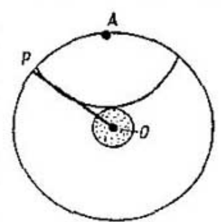
El conjunto de puntos del círculo de detección a los que puede llegar la lancha en el tiempo t, es una zona limitada por un arco de radio vt con centro en el punto A. Entre estos puntos, aquellos a los cuales la lancha puede llegar imperceptiblemente se encuentran a la izquierda del haz OP.

Designemos el conjunto de estos puntos «accesibles» por D. En las figuras se muestra cómo cambia este conjunto con curso del tiempo hasta que ... Aquí son posibles dos casos.

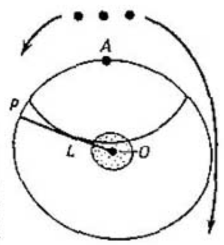


1) Si la velocidad v no es lo suficientemente grande, en cierto momento t el conjunto D, sin llegar hasta el círculo de seguridad, desaparece del todo: esto significará que durante el tiempo t la lancha, por supuesto, será vista, o sea, que a esta velocidad la

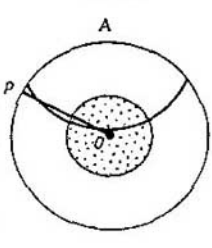
lancha no podrá llegar hasta la isla. Señalemos que en el último momento $t = t_0$, el rayo OP roza el arco cuyo radio es vt_0 con centro en A en cierto punto L. El punto L está situado, sin lugar a dudas, fuera del círculo de seguridad (de lo contrario la lancha podría llegar hasta la isla); además, cuanto mayor es la velocidad v, tanto más tiempo t_0 se necesita para la detección y tanto más cerca de la isla se encuentra el punto L.



2) Si la velocidad v es mayor de cierto valor v_0, el conjunto D en algún momento llega hasta el círculo de seguridad. Esto quiere decir que si $v > v_0$ la lancha podrá llegar hasta la isla.



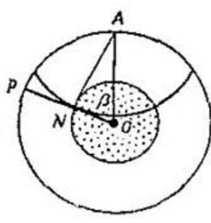
El valor mínimo de la velocidad v_0 corresponde, como es fácil de ver, al caso en que el haz OP tiene tiempo para rozar el arco de radio vt_0 justamente en el punto N, que está sobre la circunferencia del círculo de seguridad. Para hallar el valor v_0 designaremos el valor del ángulo NOA por β y emplearemos las siguientes igualdades:



$$|NO| = r = \frac{v_0 T}{2\pi}, \quad |AN| = v_0 t_0,$$

$$\frac{|AN|}{|NO|} = \operatorname{tg} \beta,$$

$$\frac{2\pi + \beta}{t_0} = \frac{2\pi}{T}, \quad |NO| = a \cos \beta.$$

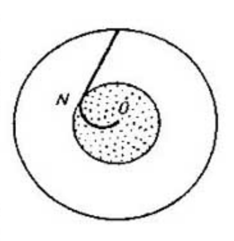


De la primera y la última igualdades hallamos que

$v_0 = (2\pi a \cos\beta)/T$,

y de las primeras cuatro igualdades obtenemos la ecuación para β:

$2\pi + \beta = \mathrm{tg}\,\beta$.



Esta ecuación se puede resolver sólo de manera aproximada, por ejemplo, con ayuda de tablas; β resulta aproximadamente igual a $0{,}92\pi/2$, de donde

$v_0 \approx 0{,}8a/T \approx 48$ km/h.

Cuando el valor de la velocidad es mayor de v_0, la lancha podrá llegar hasta el círculo de seguridad. □

4.14*. a) Un niño está nadando en el centro de una piscina circular. Su padre, que se encuentra en el borde de la piscina, no sabe nadar, pero corre cuatro veces más rápido de lo que nada el niño. El hijo corre más rápido que el padre. El hijo desea escaparse. ¿Podrá hacerlo?

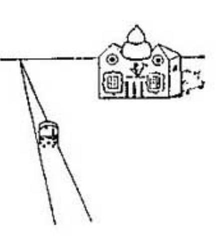
b) ¿Cuál deberá ser la relación de las velocidades v y u (v es la velocidad a la que nada el hijo; u, la velocidad a la que corre el padre) para que el hijo no pueda escaparse?

5 Líneas de nivel

En el presente parágrafo se examinan problemas y teoremas de los parágrafos anteriores, sólo que empleando terminología nueva. Las nociones que vamos a dar a conocer —*funciones sobre el plano* y *sus líneas de nivel*— son útiles, particularmente, al resolver problemas del mínimo y máximo.

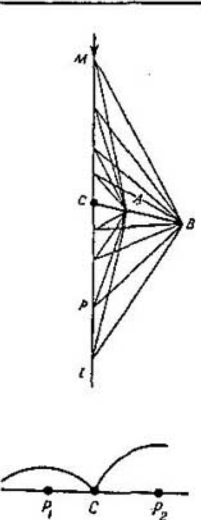
Problema acerca del autobús.

5.1. Por una carretera recta marcha un autobús con excursionistas. A un lado de la carretera, en ángulo a ella, está situado un palacio. ¿En qué punto de la carretera tiene que pararse el autocar para que desde éste los excursionistas puedan contemplar lo mejor posible el palacio?



En lenguaje matemático este problema suena así.

Sean dados una recta l y un segmento AB que no la interseca. Hallar en la recta un punto P para el cual el ángulo APB tenga el mayor valor posible.

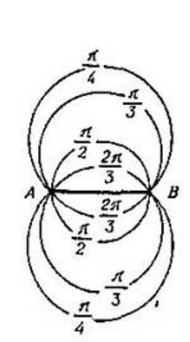


Primero veamos cómo aproximadamente cambia el ángulo AMB cuando el punto M avanza por la recta l. Con otras palabras: cómo se comporta la función f, la cual a cada punto M de la recta l pone en correspondencia el valor del ángulo AMB.

Es fácil de construir el gráfico aproximado de esta función. (Recordemos que el gráfico se traza de la siguiente manera: sobre cada punto M de nuestra recta se toma un punto a una distancia igual a $f(M) = \widehat{AMB}$).

Se puede resolver el problema analíticamente: introducir las coordenadas para la recta l, expresar el valor del ángulo AMB mediante x —la coordenada del punto M— y hallar para qué valor de x la función obtenida llegará al máximo. Sin embargo, la fórmula para $f(x)$ resulta bastante complicada.

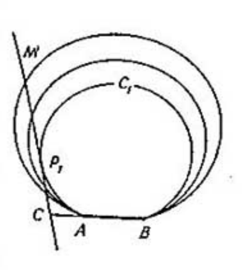
Mostraremos una solución más elemental y aleccionadora. Pero para esto es necesario estudiar la dependencia entre el valor del ángulo AMB y la posición del punto M en todo el plano (y no sólo en la recta l).



□ El conjunto de puntos M del plano para los cuales el ángulo AMB tiene un valor dado φ es un par de arcos simétricos con los extremos en los puntos A y B (véase el § 2 E). Si se trazan estos arcos para distintos valores φ $(0 < \varphi < \pi)$, entonces obte-

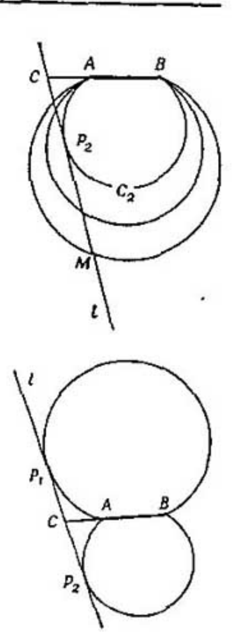
nemos la familia de arcos que tapan todo el plano, a excepción de la recta AB. En la figura están dibujados unos cuantos arcos semejantes, y en cada uno está escrito a qué valor φ corresponde. Por ejemplo, al valor de $\varphi = \pi/2$ le corresponde una circunferencia de diámetro AB.

Ahora examinaremos solamente los puntos M que se encuentran sobre la recta l. Entre ellos tenemos que elegir aquél, para el cual el ángulo AMB tiene el mayor valor. Por cada punto pasa un arco de nuestra familia: siendo $\widehat{AMB} = \varphi$, el punto M está sobre el arco que corresponde a este valor de φ. De esta manera, el problema se reduce a que entre todos los arcos que tocan la recta l hay que elegir el que corresponde al mayor valor de $\widehat{AMB} = \varphi$.



Examinemos la parte de la recta l. situada a un lado del punto de intersección C de las rectas AB y l. (No vamos a examinar el caso cuando el segmento AB es paralelo a la recta l. Examínelo Usted mismo). Tracemos el arco c_1, tangente a esta parte de la recta, y demostremos que desde el punto de intersección P_1 el segmento se ve con el ángulo mayor posible. En realidad, para cualquier punto M de la recta l, que se encuentre fuera de la circunferencia c_1, $\widehat{AMB} < \widehat{AP_1B}$.

Es evidente que al otro lado del punto C todo sucederá de la misma forma: el punto P_2, desde el cual el segmento AB se ve con el ángulo mayor posible, también es el punto de tangencia de la recta y uno de los arcos de nuestra familia.



Así pues, hemos demostrado que el punto P buscado en el problema coincide con uno de los puntos P_1 y P_2, en los cuales las circunferencias que pasan por los puntos A y B, tienen tangencia con la recta l. En calidad de P deberá escogerse el punto para el cual el angulo PCA sea agudo. Cuando el segmento AB es perpendicular a la recta l, de los razonamientos de simetría se deduce enseguida que los puntos P_1 y P_2 son completamente equitativos. O sea, los puntos de los que trata el problema en este caso son dos. (Sin embargo, los excursionistas en todo caso elegirán aquel punto P_1 o P_2 desde el cual se vea la fachada del palacio.)

Funciones sobre el plano. La idea principal de la resolución del problema 5.1 es investigar en todo el plano la función f que a cada punto le pone en correspondencia el valor del ángulo $\widehat{AMB}$, o sea $f(M) = \widehat{AMB}$.

En los parágrafos anteriores ya hemos chocado, de hecho, con diferentes funciones. Además de las funciones más simples, relativas al plano, tales

como $f(M) = |OM|$, $f(M) = \rho(l, M)$,

$f(M) = \widehat{ABM}$ (donde O, A, B son los puntos dados y l, la recta dada), hemos estudiado las sumas, restas, relaciones de dichas funciones y otras de sus combinaciones.

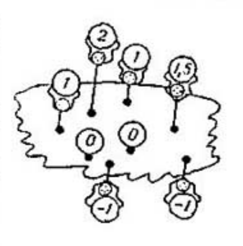
Líneas de nivel. La mayor parte de las condiciones que determinan los conjuntos de puntos, se pueden presentar así. Sobre el plano (o sobre alguna de sus partes) está dada una función f, y es necesario determinar el conjunto de puntos M, en los cuales esta función toma el valor dado h, o sea $\{M: f(M) = |h|\}$.

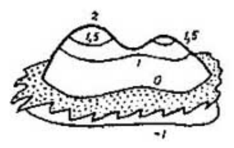
Por regla general, para cada cifra fijada de h este conjunto es cierta línea; de este modo, el plano se descompone en líneas llamadas *líneas de nivel* de la función f. Así, al resolver el problema 5.1 hemos trazado las líneas de nivel de la función $f(M) =$

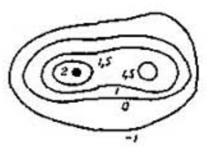
$= \widehat{AMB}$.

Gráfico de la función. Expliquemos ahora de donde procede el término «línea de nivel». La cosa es que para las funciones dadas sobre el plano, se pueden trazar los gráficos de la misma forma que se hace para las funciones $y = f(x)$, dadas sobre una recta; sólo que ahora el gráfico se va a trazar en el espacio. Consideraremos que el plano en el que está dada nuestra función f es horizontal, enton-

ces para cada punto M de dicho plano vamos a señalar un punto situado sobre M a una distancia de $|f(M)|$, si $f(M) > 0$ y debajo del mismo a la distancia $|f(M)|$, si $f(M) < 0$; todos los puntos señalados de esta forma componen, por lo general, cierto plano, llamado *gráfico de la función f*. Con otras palabras, si en el plano horizontal introducimos el sistema de coordenadas Oxy y dirigimos el eje Oz verticalmente hacia arriba, el gráfico de la función resultará el conjunto de puntos con coordenadas $(x; y; z)$, donde $z = f(M)$, mientras $(x; y)$ son las coordenadas del punto M en el plano. (Si la función está definida no en todos los puntos del plano, sino solamente en cierto dominio, el gráfico estará situado sobre los puntos de este recinto de definición.)

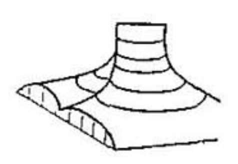






Así pues, la línea de nivel $\{M: f(M) = h\}$ representa en sí aquellos puntos M sobre los cuales los puntos del gráfico están situados «a un mismo nivel», a la altura h.

En las páginas 100—102 vienen trazados los gráficos de las funciones cuyas líneas de nivel son conjuntos del alfabeto. Así, vemos que el gráfico



de la función $f(M) = \widehat{AMB}$ representa una «cadena de montañas» de altura π sobre el segmento AB, desde el cual el gráfico suavemente desciende hasta cero. (Recordemos que al co-

mienzo de la solución del problema 5.1 hemos trazado el gráfico de esta función, sólo que para cierta recta l.)

Una función f de tipo

$$f(M) = \lambda_1 \rho(M, l_1) + \lambda_2 \rho(M, l_2) + \ldots + \lambda_n \rho(M, l_n),$$

como hemos dicho en el § 2 (teorema de distancias hasta las rectas), en cada uno de los pedazos Q, en que dividen el plano las rectas $l_1, l_2, \ldots, l_n$, se escribe mediante una expresión lineal

$$f(x, y) = ax + by + c.$$

De esta manera, su gráfico estará compuesto de pedazos inclinados del plano, o bien (siendo $a = b = 0$) horizontales. Esto se ve en los ejemplos de los conjuntos para los puntos C, I, J del alfabeto.

Las líneas de nivel de semejante función constan de pedazos de rectas; y si el gráfico tiene una plazoleta horizontal, cierta línea de nivel contiene un pedazo entero Q del plano.

Una función f tipo

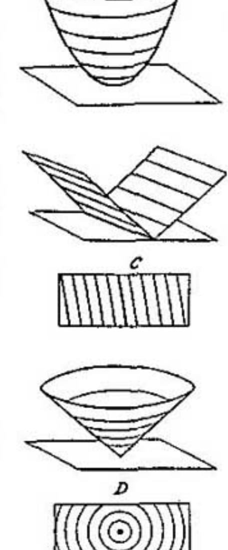
$$f(M) = \lambda_1 |MA_1|^2 + \lambda_2 |MA_2|^2 + \ldots + \lambda_n |MA_n|^2$$

cuando $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$, también se reduce a una función lineal sobre todo el plano (por ejemplo F),

y en el caso general, cuando $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \neq 0$, a una función tipo

$$f(M) = d\,|MA|^2,$$

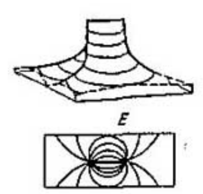
donde A es cierto punto del plano. Las líneas de su nivel son circunferencias (teorema sobre los cuadrados de distancias del § 2), y su gráfico es la superficie de *un paraboloide de revolución.*



Aquí vienen mostrados los gráficos de las funciones correspondientes a los puntos del alfabeto, y debajo de cada uno de ellos, el mapa de líneas de nivel.

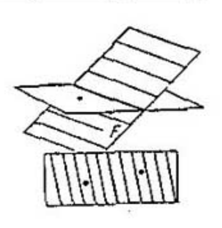
C. $f(M) = \rho(M, l)$. El gráfico es un ángulo diedro, mientras las líneas de nivel representan pares de líneas rectas.

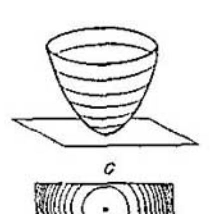
D. $f(M) = |MO|$. El gráfico es un cono, y las líneas de nivel, circunferencias concéntricas.



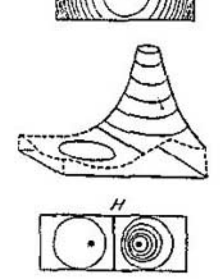
E. $f(M) = \widehat{AMB}$. El gráfico es una montaña con la cima en forma de un segmento horizontal, en los extremos del cual hay precipicios.

F. $f(M) = |MA|^2 - |MB|^2$. El gráfico es un plano, y las líneas de nivel, rectas paralelas.

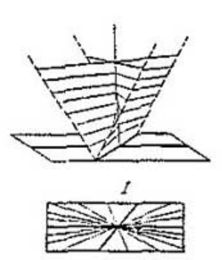




G. $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$. El gráfico es un paraboloide de revolución, y las líneas de nivel, circunferencias concéntricas.

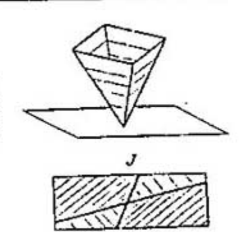


H. $f(M) = |MA|/|MB|$. El gráfico tiene una cavidad al lado del punto A, y al lado del punto B sube indefinidamente. Las líneas de nivel son circunferencias que no se cortan, cuyos centros están sobre la recta AB; además, cada dos de ellas tienen como eje radical la misma recta: la mediatriz del segmento AB.

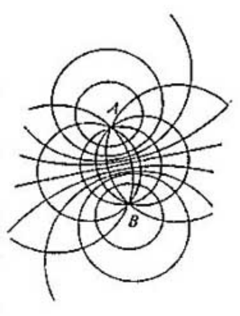


I. $f(M) = \rho(M, l_1)/\rho(M, l_2)$. El gráfico se obtiene de la manera siguiente; se examina una superficie en forma ensillada —paraboloide hiperbólico—, que pasa por la recta l_1, y una recta vertical, que pasa por el punto de intersección O de l_1 y l_2; la parte de esta superficie, que está situada por debajo del plano dado, se refleja simétricamente con respecto a ella. Las líneas de nivel son pares de rectas que pasan por el punto O.

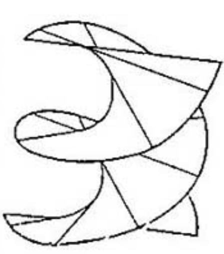
J. $f(M) = \rho(M, l_1) + \rho(M, l_2)$. El gráfico es un ángulo tetraédrico. Las líneas de nivel son rectángulos cuyas diagonales pertenecen a l_1 y l_2.

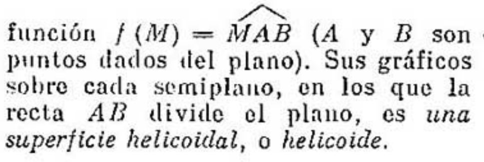


Probablemente, los gráficos más complejos en nuestro alfabeto los tengan las funciones $f(M) = \widehat{AMB}$ y $f(M) = |AM|/|BM|$. Observemos, que entre los mapas de las líneas de nivel de dichas funciones hay una relación interesante: si éstas se trazan sobre un mismo dibujo, se obtienen dos familias de circunferencias, además, cualquier circunferencia de una familia corta a cualquier circunferencia de la otra en ángulo recto (?). Como suele decirse, estas familias son mutuamente *ortogonales*.



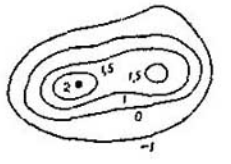
Ofreceremos otro ejemplo más de una función simple, cuyas líneas de nivel son radios vectores que salen de un punto, mientras el gráfico, resulta una superficie bastante compleja. Esta




función $f(M) = \widehat{MAB}$ (A y B son puntos dados del plano). Sus gráficos sobre cada semiplano, en los que la recta AB divide el plano, es *una superficie helicoidal*, o *helicoide*.

Mapa de la función. Como vemos, para muchas funciones es bastante difícil dibujar sus gráficos espaciales. Como regla, un método más cómodo para mostrar el comportamiento de la función en el plano es dibujar el mapa de sus líneas de nivel.

Los mapas geográficos físicos se hacen de la forma siguiente. Supongamos, que $f(M)$ es la altura de la superficie en el punto M, sobre el nivel del mar. Entonces se trazan las líneas de nivel $\{M: f(M) = 200 \text{ m}\}$, $\{M: f(M) = 400 \text{ m}\}$, etc. Las zonas entre estas líneas de nivel se pintan de diferentes colores: la zona $\{M: 0 < f(M) < 200 \text{ m}\}$, de verde; las zonas $\{M: f(M) > 200 \text{ m}\}$, de marrón, y las zonas $\{M: f(M) < 0\}$, de azul de diferentes matices.



Para componer el mapa de la función, hay que trazar varias de sus líneas de nivel, pero en número suficiente para que por ellas se pueda juzgar cómo están situadas las demás, y escribir sobre cada una de ellas a qué valor de la función (a qué h) corresponde.

Si nos ponemos de acuerdo en trazar las líneas de nivel a intervalos iguales según el valor de la función 0, $\pm d$, $\pm 2d$, . . ., entonces conforme sea la densidad de dichas líneas se podrá juzgar sobre la pendiente del gráfico: las líneas serán tanto más frecuentes cuanto mayor sea la inclinación del

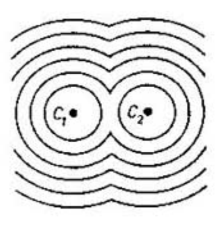
gráfico hacia el plano horizontal.

Líneas de separación. Al resolver el problema 3.23 (sobre el queso) examinamos una función bastante complicada

$$f(M) = \text{mín}\,\{|MC_1|,\ |MC_2|,\ \ldots,\ |MC_n|\},$$

la cual yuxtapone a cada punto M del plano la menor de las distancias desde dicho punto hasta los puntos dados $C_1, C_2, \ldots, C_n$. En la resolución del problema 3.23, en realidad nos hacía falta no tanto esta función como las líneas de división del plano en polígonos vinculadas con la misma. Imaginémonos el mapa y el gráfico de esta función. Empezaremos por los casos más simples $n = 2$ y $n = 3$.

5.2. a) En el plano hay dos puntos C_1 y C_2. Trazar el mapa de las líneas de nivel de la función $f(M) = \text{mín}\,\{|MC_1|,\ |MC_2|\}$.



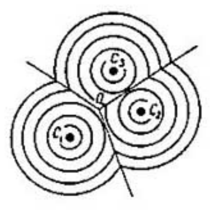
b) En el plano se dan tres puntos: C_1, C_2 y C_3. Trazar el mapa de las líneas de nivel de la función $f(M) = \text{mín}\{|MC_1|,\ |MC_2|,\ |MC_3|\}$.

□ a) Examinemos el conjnto de puntos M, pa₁a los cuales $|MC_1| = |MC_2|$. Como ya sabemos, resulta rá ser la mediatriz del segmento C_1C_2. Esta divide el plano en dos semiplanos; los puntos de uno de ellos están más cerca de C_1, mientras los del otro, más cerca de C_2.

Así pues, en un semiplano $f(M) =$

$= |MC_1|$, y en el otro, $f(M) = |MC_2|$. Por consiguiente, en el primer semiplano hay que trazar las líneas de nivel de la función $f(M) = |MC_1|$ que representan una serie de circunferencias, y reflejar este mapa simétricamente con relación a la mediatriz.

b) Examinemos los conjuntos de puntos donde $|MC_1| = |MC_2|$; $|MC_2| = |MC_3|$ y $|MC_1| = |MC_3|$. Los hemos examinado en el problema 3.1: son las tres mediatrices del triángulo $C_1C_2C_3$, que se encuentran en un mismo punto. Tres rayos de estas mediatrices, que comienzan en el punto O, dividen el plano en tres dominios. Está claro que en el dominio del punto C_1, $f(M) = |MC_1|$; en el de C_2, $f(M) = |MC_2|$; y en el de C_3, $f(M) = |MC_3|$. De este modo, el mapa de la función $f(M) = \text{mín}\{|MC_1|, |MC_2|, |MC_3|\}$ representa la unión de tres mapas, pegados por la línea de separación, por los tres rayos. □

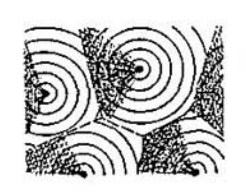


El gráfico de la función

$$f(M) = \text{mín}\{|MC_1|, |MC_2|, \ldots, |MC_n|\}$$

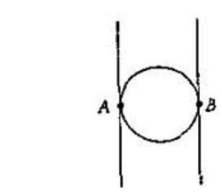
uno puede imaginárselo del siguiente modo. Si en un cajón se echa una gruesa capa llena de arena y en el fondo del mismo, en los puntos C_1, C_2, C_3, se abren tres orificios, la arena, al ir saliendo, formará su respectivo

«embudo» en torno a cada uno de ellos, entonces la superficie de todos los embudos constituirá justamente el gráfico de la función f. (Claro está, que la arena deberá elegirse de una calidad que proporcione al embudo declive natural de 45°.)



Recurriremos ahora a los problemas 3.11 y 3.12.. En sus condiciones también se pueden ver algunas funciones en el plano.

5.3. Sean dos puntos A y B en el plano. Trazar el mapa de las líneas de nivel de las funciones:

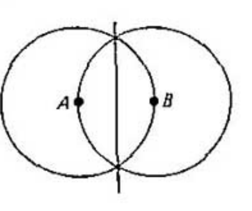


a) $f(M) = \text{máx}\{\widehat{AMB}, \widehat{BAM}, \widehat{MBA}\}$

b) $f(M) = \text{mín}\{|AM|, |MB|, |AB|\}$,

y describir sus gráficos.

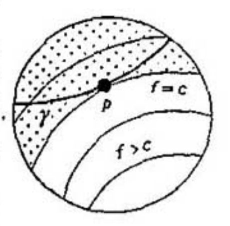
Valores extremos de las funciones. Sea f una función dada en el plano. Representemos su gráfico como una región de colinas. Los valores máximos de $f(M)$ corresponden a la altura de la cumbre de las montañas de su gráfico, mientras los mínimos, a la profundidad de las cavidades.



En el mapa de las líneas de nivel de la función, como regla, las cumbres de las montañas y las cavidades están rodeadas por líneas de nivel. Por ejemplo, para la función $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$, el valor mínimo de M_0 es el punto medio del segmento AB, y las líneas de nivel son circunferencias concéntricas cuyo centro es el pnuto M_0.

Para la función $f(M) = \widehat{AMB}$ tenemos un cuadro más complicado. Esta función alcanza su valor máximo igual a π solamente en todos los puntos del segmento AB, y su valor mínimo O en los demás puntos de la recta que pasa por AB. El paso del valor máximo al mínimo en los puntos A y B no es suave (en ellos f no está definida): aquí el gráfico tiene precipicios verticales.

Al principio del capítulo hemos utilizado el mapa de las líneas de nivel para resolver el problema 5.1. Este también resulta un problema en el que es necesario determinar el máximo, pero de otro tipo. En su aspecto general el problema se formula así: *hallar qué valor máximo o mínimo adquiere la función f, dada en el plano, sobre cierta curva γ* (en el problema examinado γ es una recta). La observación que hemos hecho en el problema 5.1 se refiere también a otros problemas semejantes: por regla general, *el mayor (y el menor) valor se alcanzará en aquellos puntos, donde γ sea tangente a las líneas de nivel de la función f*[1]).

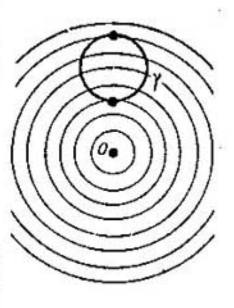


Supongamos que el valor máximo de la función f en la curva γ se alcanza en el punto P y es igual a $f(P) = c$.

[1]) O bien en el punto, donde la propia función f adquiere su máximo, si la curva γ pasa por dicho punto.

Entonces la curva γ no puede entrar en el dominio $\{M: f(M) > c\}$, debe pertenecer por entero al dominio complementario $\{M: f(M) \leqslant c\}$, además, el punto P está en la línea de separación entre estos dominios: en la línea de nivel $\{M: f(M) = c\}$. De esta manera, la curva γ no puede pasar a través de la línea de nivel $\{M: f(M) = c\}$, o sea, tendrá que ser tangente a la misma en el punto P.

Hemos visto como este principio de «tangencia» se manifiesta en los problemas del § 4 para hallar el extremo. En estos problemas buscábamos el máximo y el mínimo de funciones simples:



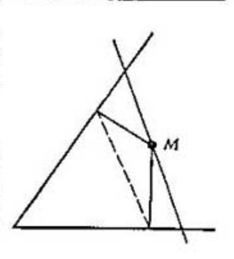
$$f(M) = \rho(M, l),$$

$$f(M) = \widehat{MOA}, \quad f(M) = |MA|$$

en la curva dada γ. Las líneas de nivel que corresponden al valor extremal resultaban tangentes a γ. Como regla, esta curva γ representaba una circunferencia. Algunos de los siguientes problemas se reducen asimismo a que es necesario determinar el máximo (o el mínimo) de la función en dada circunferencia o recta.

5.4. a) En la hipotenusa del triángulo rectángulo dado, hallar el punto para el cual la distancia entre sus proyecciones sobre los catetos es la mínima.

b)* En dada recta hallar el punto M de modo que la distancia entre sus proyecciones sobre los lados de dado ángulo sea la mínima. ↓



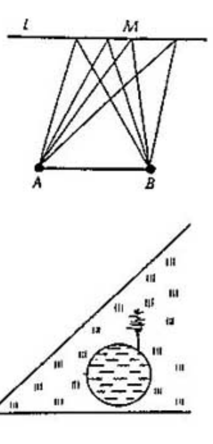
5.5. Sea dada una circunferencia con el centro O y el punto A dentro de ella. Hallar en la circunferencia el punto M para el cual el valor del ángulo AMO sea el máximo.

5.6. A y B son dos puntos dados. Hallar sobre dada circunferencia γ el punto M, desde el cual

a) la suma de los cuadrados de las distancias,

b) la diferencia de los cuadrados de las distancias

hasta los puntos A y B sea la mínima.

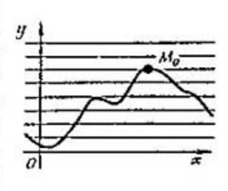


5.7. Sean una recta l y un segmento AB paralelo a ella. Determinar las posiciones del punto M sobre la recta l en las cuales el valor de $|AM|/|MB|$ tome los valores máximo y mínimo. ↓

5.8. Entre dos caminos rectos está situado un lago. ¿En qué lugar de la orilla de éste hay que construir un sanatorio para que la suma de las distancias desde el mismo hasta los dos caminos sea el mínimo? Examine el caso cuando el lago tiene forma de a) círculo, b) rectángulo.

Señalemos que para hallar el máximo de la función $y = f(x)$ de una variable nos guiamos por el «principio

de tangencia». Supongamos que en un plano está trazado el gráfico de la función f: cierta curva. Determinar el máximo de la función significa encontrar el punto más alto del gráfico. Es evidente que para esto es necesario trazar una recta tangente al gráfico y paralela al eje Ox; además trazarla de modo que todo el gráfico quede debajo de dicha recta.



6 Curvas de segundo grado

Elipses, hipérbolas, parábolas.

Hasta ahora nos hemos limitado a un pequeño conjunto de líneas, que se estudian en la escuela detalladamente: rectas y circunferencias. A ellas se han reducido todos los puntos del alfabeto, de A a J. En este capítulo vamos a examinar algunas otras curvas: elipses, hipérbolas y parábolas. Todas estas curvas se denominan «secciones cónicas» por cuanto pueden obtenerse en la intersección del plano con la superficie de un cono, como se muestra en la figura de la pag. 124.

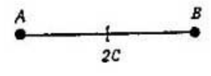
En nuestro libro los elipses, las hipérbolas y las parábolas serán definidas al principio geométricamente, como continuación del «alfabeto» del §2. Más adelante intervendrán como envolventes de ciertas familias de rectas. Y, al final, empleando el método de coordenadas, veremos que estas curvas se dan con ecuaciones geométricas de segundo orden. La demostración de la equivalencia de estas defini-

ciones no es simple. Sin embargo, todas ellas son útiles, cada definición nueva permite resolver con menos dificultades un tipo nuevo de problemas.

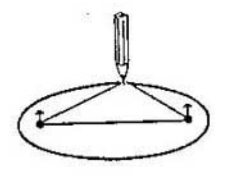
Así pues, continuaremos el alfabeto con nuevas letras K, L, M, algo más tarde, con la N.

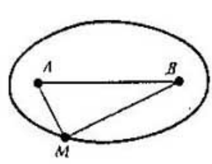
K. La elipse. Examinemos *el conjunto de puntos de una curva plana en la que es constante la suma de las distancias de sus puntos M a dos puntos fijos A y B.*

Designemos este valor constante (según la costumbre) por $2a$, y la distancia $|AB|$ entre los puntos A y B, por $2c$. Observemos que siendo $a \leqslant c$, este conjunto presenta poco interés: para $a < c$, el conjunto buscado es vacío, ya que en el plano no hay ningún punto M para el cual $|AM| + |MB| < |AB|$; y si $a = c$, el conjunto representa en sí el segmento AB.



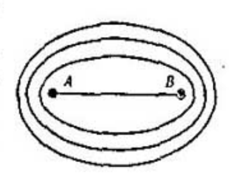
Para ver lo que resulta siendo $a > c$, procederemos de la siguiente manera. En los puntos A y B clavamos dos puntas y pasamos por fuera de éstas un hilo con los extremos anudados cuya longitud sea $2(a + c)$; si hacemos correr un lápiz por dentro del hilo, de forma que siempre se mantenga bien tirante, obtendremos cierta curva cerrada que se llama *elipse*. Los puntos A y B son *los focos* de la elipse. De la definición de la





elipse es evidente que ésta tiene dos ejes de simetría: la recta AB y una recta perpendicular a ella que pasa por el centro O del segmento AB. Los segmentos de estas dos rectas situadas dentro de la elipse son sus *ejes*, y el punto O, su *centro*.

Cambiando la longitud del hilo tracemos toda una familia de elipses con los focos dados; con otras palabras, el mapa de las líneas de nivel de la función

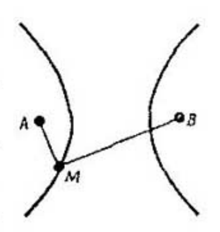


$$f(M) = |MA| + |MB|.$$

L. La hipérbola. Examinemos *el lugar geométrico de una curva en la que la diferencia de las distancias de sus puntos a dos puntos fijos A y B sea igual (por el módulo) a un valor constante* $2a$ $(a > 0)$.

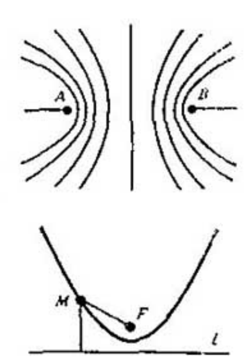
Sea, como antes, que $|AB| = 2c$. Siendo $a > c$, el conjunto L es vacío, ya que en el plano no hay ningún punto M para el cual $|AM| - |MB| > AB$ o $|MB| - |MA| > |AB|$; siendo $a = c$ conjunto L representa dos rayos de la recta AB, es decir de la recta (AB) hay que excluir el segmento $[AB]$.

En el caso de que $a < c$, el conjunto L consta de dos líneas (ramas), representadas en la figura (una es el conjunto $\{M: |MA| - |MB| = 2a\}$, y la otra, el conjunto $\{M: |MB| - |MA| = 2a\}$. Este conjunto se de-



nomina *hipérbola*, y los puntos A y B son sus *focos*.

De la definición del conjunto L es evidente que la hipérbola tiene dos ejes de simetría. El punto medio O del segmento AB se llama *centro* de la hipérbola.



Para obtener todo el mapa de las líneas de nivel de la función

$$f(M) = \left| |MA| - |MB| \right|,$$

hay que añadir a la familia de hipérbolas con focos A y B la mediatriz del segmento AB (ésta corresponde al valor $f(M) = 0$).

M. La parábola. *El lugar geométrico de la curva cuyos puntos equidistan de un punto F y de una recta l dados, se llama parábola.*

El punto F se llama *foco* de la parábola y la recta l, *directriz*.

La parábola tiene un eje de simetría, que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz.

Hagamos el primer resumen. Hemos completado el alfabeto con tales conjuntos

K. $\{M: |MA| + |MB| = 2a\}$,
L. $\{M: \left| |MA| - |MB| \right| = 2a\}$,
M. $\{M: |MF| = \rho(M, l)\}$.

Ahora sabemos que si el problema se reduce a uno de los conjuntos K, L ó M la respuesta será una elipse, una hipérbola o una parábola. Claro está, además de indicar el nombre, en la respuesta hay que determinar las di-

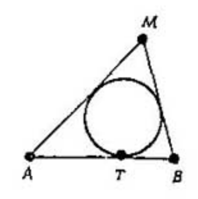
mensiones de la figura y su disposición; por ejemplo, señalar los focos y el número a.

6.1. En el plano están dados los puntos A y B. Hallar el conjunto de puntos M para los cuales:

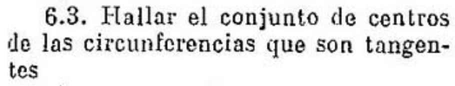
a) el perímetro del triángulo AMB es igual a un valor constante p;

b) el perímetro del triángulo AMB no es mayor que p;

c) la diferencia $|MA| - |MB|$ no es menor de d.



6.2. Sean el segmento AB y el punto T sobre él. Determinar el conjunto de puntos M para los cuales la circunferencia inscrita en el triángulo AMB es tangente al lado AB en el punto T.



6.3. Hallar el conjunto de centros de las circunferencias que son tangentes

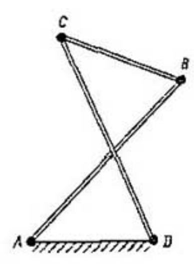
a) a una recta y pasan por un punto dados;

b) a una circunferencia dada y pasan por un punto fijo dentro de ésta;

c) a una circunferencia dada y pasan por un punto fijo fuera de ésta;

d) a una circunferencia y una recta dadas;

e)* a dos circunferencias dadas. ↓



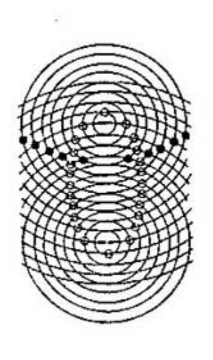
6.4. En una articulación quebrada cerrada $ABCD$, para la cual $|AD| = |BC| = a$ y $|AB| = |CD| = b$ el elemento AD está fijo.

Hallar el conjunto de puntos de intersección de las rectas AB y CD

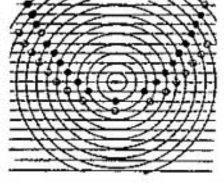
a) siendo $a < b$;

b) siendo $a > b$.

6.5. a) En un plano hay dos puntos A y B, la distancia entre los cuales es un número entero n (en la figura $n = 12$). Están trazadas todas las circunferencias de radios de números enteros con los centros A y B. En la red obtenida viene señalada la sucesión de los nudos (es decir los puntos de intersección de las circunferencias), en la cual cada dos nudos vecinos son los vértices opuestos de un cuadrilátero curvilíneo. Demostrar que todos los puntos de dicha sucesión se encuentran sobre una elipse o sobre una hipérbola.



b) En el plano se da una recta l, y sobre ella, el punto F. Están trazadas todas las circunferencias cuyos radios son números enteros y el centro en F, así como también todas las rectas paralelas a l que se hallan a la distancia de un número entero de ésta. Demostrar que todos los puntos de la sucesión de los nudos de la red, construida igualmente que en el problema a), se encuentran sobre una parábola con el foco F.

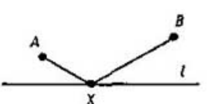


Las superficies que se obtienen girando en el espacio la parábola, la elipse y la hipérbola alrededor de sus ejes de simetría se llaman, respectiva-

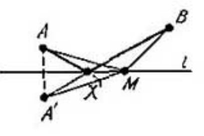
mente, *paraboloide*, *elipsoide* e *hiperboloide de revolución*.

Focos y tangentes. Muchos problemas interesantes sobre las elipses, las hipérbolas y las parábolas están relacionados con las propiedades de las tangentes a dichas curvas. La propiedad principal de la tangente a la elipse la obtendremos comparando dos soluciones del siguiente problema de construcción sencillo.

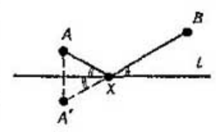
6.6. Sean una recta l y dos puntos A y B a un lado de ésta. Hallar sobre la recta l un punto X tal para el cual la suma de las distancias $|AX| + |XB|$ hasta los puntos A y B sea la mínima.



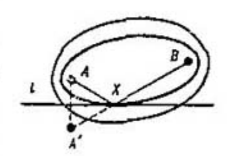
□Examinemos el punto A', simétrico al punto A respecto a la recta l. Para todo punto M de dicha recta $|A'M| = |AM|$. Por lo tanto, la suma $|AM| + |MB| = |A'M| + |MB|$ adquiere el valor mínimo de $|A'B|$ en el punto X, de intersección del segmento $A'B$ con la recta l. □



Observemos que el punto X posee la siguiente propiedad: *los segmentos* AX *y* BX *forman ángulos iguales con la recta* l.



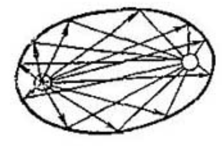
Si hubiéramos resuelto el problema 6.6 según el esquema general descrito en el § 5, es decir con ayuda de las líneas de nivel, tendríamos que haber procedido así: trazar la familia



de elipses $\{M: |AM| + |MB| = c\}$ con los focos A y B, dependientes del parámetro c, y elegir entre estas elipses aquella que sea tangente a la recta l.

De este modo, *el punto X es el punto de tangencia de la elipse* (con los focos A y B) *y la recta l.* En realidad, todos los demás puntos M de la recta distintos a X están situados fuera de la elipse, o sea, para ellos la suma $|AM| + |MB|$ resulta mayor.

Comparando la primera solución con la segunda obtenemos la llamada propiedad focal de la elipse: *los segmentos que unen el punto X de la elipse con sus focos forman ángulos de igual valor con la tangente trazada a la elipse en el punto X.*

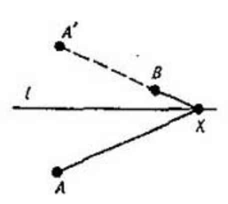


Esta propiedad tiene una palmaria interpretación física. Si la superficie de un reflector (un faro) se hace en forma de un trozo de elipsoide, y la lámpara—manantial puntiforme de luz— se coloca en un foco A, entonces, después de reflejados, los rayos convergen en el otro foco B.

Análoga a esta propiedad de la elipse es la propiedad focal de la hipérbola: *los segmentos que unen el punto X de la hipérbola con sus focos forman ángulos de igual valor con la tangente en el punto X.* Esta propiedad se puede demostrar resolviendo el siguiente problema de dos formas.

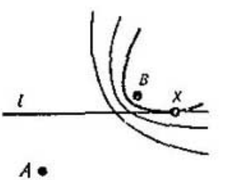
6.7. Sean la recta l y dos puntos A y B a diferentes lados de ésta;

además, el punto A se halla situado más lejos de la recta l que el punto B. Hallar sobre la recta un punto X para el cual la diferencia de las distancias $|AX| - |BX|$ sea la máxima.

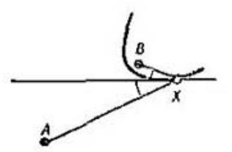


Una solución nos lleva a la siguiente respuesta: si designamos por A' el punto simétrico al punto A respecto a la recta l, entonces el punto buscado X será el punto de intersección de la recta $A'B$ con la recta l (?). Es claro, que para este punto X los segmentos AX y XB forman ángulos iguales con la recta l.

La otra solución (según el esquema general) nos lleva a la siguiente respuesta: X es el punto de tangencia de la recta l con cierta hipérbola (cuyos focos son A y B). Comparando estas dos respuestas llegamos a la propiedad focal de la hipérbola.

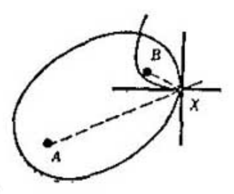


De las propiedades focales se deduce un corolario interesante que se refiere a la familia de todas las elipses e hipérbolas con las focos dados A y B.



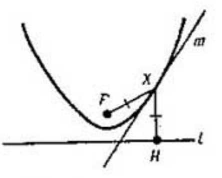
Examinemos una elipse y una hipérbola que pasan por cierto punto X. Tracemos por el punto X unas rectas que formen ángulos iguales con las rectas AX y BX. Resulta evidente que estas rectas son perpendiculares entre sí.

De las propiedades focales se deduce que una recta es la tangente a la elipse, y la



otra, tangente a la hipérbola. De esta forma, las tangentes a la elipse y a la hipérbola son perpendiculares, o sea, las familias de elipses e hipérbolas con los focos A y B son mutuamente ortogonales (véase la pág.102): cada curva de una familia corta a cada curva de la otra en ángulo recto.

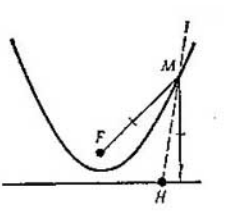
Estas dos familias se verán bien en el gráfico referente al problema 6.5a), al pintar los cuadros en forma escaqueada.



Propiedad focal de la parábola. Sea una parábola con el foco F, la directriz l y cierto punto X en aquélla. Entonces *la recta XF y la perpendicular bajada desde X a l forman ángulos iguales con la tangente a la parábola en el punto X.*

Demostrémoslo. Supongamos que H es la base de la perpendicular bajada desde X a l. Según la definición de la parábola, $|XF| = |XH|$. Por consiguiente, el punto X se encuentra sobre la mediatriz m del segmento FH.

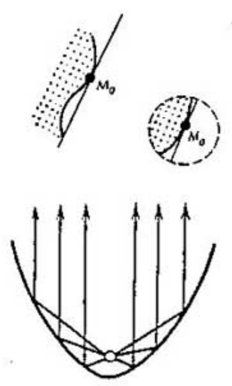
Ahora demostremos que la recta m es tangente a la parábola. Para eso mostraremos que sólo tiene un punto común con la parábola (precisamente el punto X) y que toda la parábola está situada a un lado de la recta m. Dicha recta divide el plano en dos semiplanos. Uno de ellos está compuesto por los puntos M, situados, más cerca de F que de H.



Mostremos que la parábola se halla situada en este semiplano, o sea, que para cualquier punto M de ella (diferente del punto X) $|MF| <$

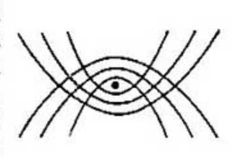
$< |MH|$. En efecto, $|MF| = \rho(M, l)$ mientras $\rho(M. l) < |MH|$ (la perpendicular es más corta que cualquier línea inclinada).

Observación. Para todas las curvas que hemos examinado, la tangente se definía así: tangente a una curva γ en el punto M_0 es la recta l que pasa por dicho punto de modo que la curva (o, por lo menos, parte de ella encerrada en cierto círculo con el centro en M_0) está situada a un lado de esta recta.



La propiedad focal de la parábola se puede emplear del modo siguiente. Si se hace un espejo en forma de paraboloide y se coloca una lámpara en el foco F, obtendremos un proyector: todos los rayos reflejados serán paralelos al eje del paraboloide.

6.8. Examinemos todas las parábolas con un foco y un eje vertical dados, evidentemente, se dividen en dos familias: en las parábolas de una familia las ramas van hacia arriba, mientras que en las de la otra, hacia abajo. Demostrar que toda parábola de una familia es ortogonal a cualquier parábola de la otra familia.



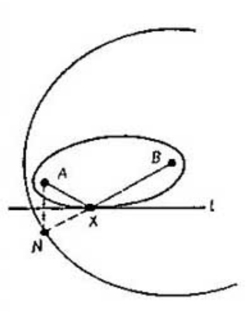
Las dos familias de parábolas de que estamos tratando en este problema se verán, al pintar en el gráfico del problema 6.5, b) los cuadros en forma escaqueada.

Las soluciones de los problemas siguientes se apoyan solamente en las

definiciones de las curvas y sus propiedades focales.

6.9. a) Sea dada una elipse con los focos A y B. Demostrar que el conjunto de puntos simétricos al foco A, con respecto a todas las tangentes a la elipse, es una circunferencia.

b) Demostrar que el conjunto de pies de las perpendiculares bajadas desde el foco A a todas las tangentes a la elipse es una circunferencia.

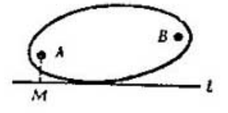


□ a) Supongamos que l es la tangente a la elipse en el punto X y que N es el punto simétrico al foco A con relación a l. Entonces, como ya sabemos (véase el problema 6.6), el punto X se halla sobre la recta NB y la distancia

$$|NB| = |AX| + |XB|$$

es constante. Vamos a designarlo, como antes, por $2a$. Así pues, la distancia desde N hasta B es constante, y el conjunto buscado es una circunferencia cuyo centro es B y el radio, $2a$.

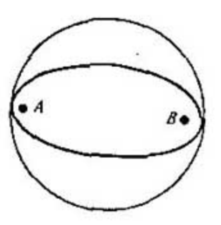
b) Supongamos que M es el pie de la perpendicular bajada desde el punto A sobre l. Es claro que

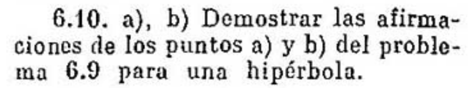


$$|AM| = \frac{1}{2}|AN|.$$

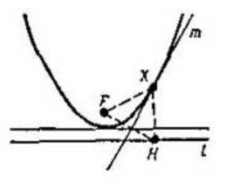
Del problema 6.9. a) sabemos que el conjunto de puntos N es una circunferencia y el problema se reduce al siguiente. Sea una circunferencia con centro en B de radio $2a$ y el punto A

dentro de ella. Hallar el conjunto de puntos medios de los segmentos AN, donde N es un punto arbitrario de la circunferencia. Este conjunto es una circunferencia de radio a con centro en el punto medio O del segmento AB. □





6.10. a), b) Demostrar las afirmaciones de los puntos a) y b) del problema 6.9 para una hipérbola.



6.11. Sea una hipérbola con el foco F y la directriz l.

a) Hallar el conjunto de puntos simétricos al foco F con relación a todas sus tangentes.

b) Demostrar que el conjunto de pies de las perpendiculares bajadas desde el foco F hacia la tangente a la parábola es una recta paralela a l.

6.12.* a) Demostrar que el producto de las distancias desde los focos de la elipse hasta su tangente es un valor constante (que no depende de la tangente). ↓

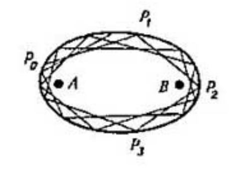
b) Hallar el conjunto de puntos desde los cuales la elipse se ve en ángulo recto.

6.13.* Resolver el problema 6.12. a) para una hipérbola.

6.14.* Resolver el punto b) del problema 6.12 para una parábola.

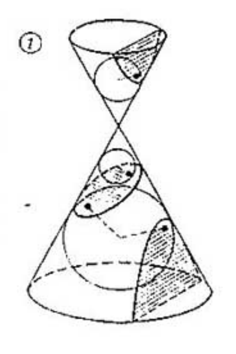
6.15.* Supongamos que la trayectoria $P_0P_1P_2P_3$ . . . de un haz luminoso

dentro de una elipse especular no pasa por los focos A y B (P_0, P_1, P_2, . . . son puntos en la elipse). Demostrar que:



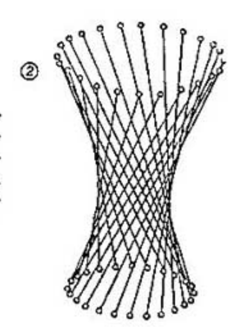
a) si el segmento P_0P_1 no pasa por el segmento AB, todos los demás segmentos: P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, . . . no cortarán al segmento AB y serán tangentes a una misma elipse cuyos focos son A y B; ↓

b) si el segmento P_0P_1 interseca a AB, todos los segmentos siguientes P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, . . ., lo intersecarán asimismo; además, las rectas P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, . . . serán tangentes a una misma hipérbola con focos en A y B. ↓



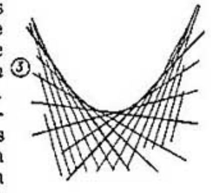
La sección de un cono por cualquier plano que no pase por su vértice es una elipse, una hipérbola o una parábola (fig. 1). Si en un cono se inscribe una esfera, que entre en contacto con la superficie secante, el punto de tangencia será el foco de la sección correspondiente, y la directriz será la línea de intersección del plano de corte con el plano de la circunferencia por el cual la esfera es tangente al cono.

La reunión de todas las rectas alejadas de una recta dada l en el espacio a una distancia fija y que forman con l cierto ángulo agudo es una superficie que se llama *hiperboloide de revolución de una hoja* (fig. 2). La misma superficie se puede obtener giran-

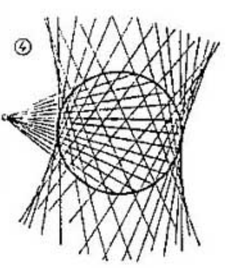


do la hipérbola alrededor de su eje de simetría l. La superficie tangente al hiperboloide en cualquier punto, lo corta por dos rectas. Las demás secciones planas de esta superficie, así como las del cono, son elipses, hipérbolas y parábolas.

Si dos puntos P y N avanzan uniformemente por dos rectas que se cortan, todas las rectas PN o bien son paralelas entre sí o (en el caso general) tienen tangencia con la misma parábola (fig. 3). Si los puntos P y N se mueven en el espacio uniformemente por dos rectas que se cruzan, la reunión de todas las rectas PN será la superficie de *un paraboloide hiperbólico* (silla de montar). El plano de corte tangente a la silla la interseca en cualquier punto por dos rectas; las demás secciones planas de la silla resultarán hipérbolas y parábolas. La superficie de la silla se puede obtener también como la reunión de todas las rectas que intersecan a dos dadas rectas cruzadas l_1 y l_2, permaneciendo paralelas a cierta superficie (que corta a l_1 y l_2).



Las figuras *4-6* sirven de ilustración a los problemas 6.16 y 6.17. Observe que en nuestras figuras están trazadas solamente



familias de rectas; sin embargo, se crea la impresión de que en ellas vienen trazadas también las envolventes: una hipérbola, una elipse o una parábola.

Las curvas como envolventes de rectas. Hasta ahora las curvas que hemos examinado, es decir las circunferencias, elipses, hipérbolas, parábolas, surgían como conjuntos de puntos que satisfacían a ciertas condiciones. En los problemas siguientes estas curvas surgen de otra forma: como envolventes de cierta familia de rectas. La palabra «envolvente» quiere decir, sencillamente, que la curva tiene tangencia con todas las rectas de esta familia.

6.16. Sean una circunferencia con centro en O y un punto A. Por cada punto M de la circunferencia hay trazada una recta perpendicular al segmento MA. Demostrar que la envolvente de esta familia será:

a) una circunferencia, cuando A coincide con el centro O;

b) una elipse, si A está dentro de la circunferencia;

c) una hipérbola, si A está fuera de la circunferencia. ↓

6.17. Sean una recta l y cierto punto A. Por cada punto M de dicha recta l tracemos una recta perpendicular al segmento MA. Demostrar que la envolvente de esta familia de rectas será una parábola. ↓

Estas familias de rectas vienen representadas en la pág. 125. No es casual que todas ellas tengan envolvente: se puede demostrar que cualquier familia «suficientemente buena» de rectas es un conjunto de rectas paralelas, o bien un conjunto de rectas que pasan por un punto o, en el caso general, un conjunto de tangentes a cierta curva (envolvente de esta familia).

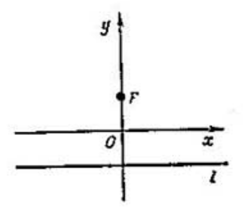
Ecuaciones de las curvas. Hemos empezado el presente parágrafo por las definiciones geométricas de la elipse, la hipérbola y la parábola. Mucha información nueva sobre estas curvas se puede obtener empleando el método de coordenadas.

Empecemos por la parábola. Es bien conocida la definición analítica de la parábola como el gráfico de la función

$$y = ax^2 \qquad (1)$$

Mostremos que la definición geométrica de la parábola, dada anteriormente, nos conlleva a esta ecuación.

Supongamos que la distancia del punto F a la recta l es igual a $2h$. Elijamos el sistema de coordenadas Oxy de modo que el eje Ox vaya paralelo a l y equidiste de F y de l, mientras que el eje Oy pase por el punto F (es evidente, que Oy será el eje de simetría de la parábola). La ecuación que se obtiene de la definición geométrica de la parábola, se transforma fácilmente en (1):



$$\sqrt{x^2 + (y-h)^2} = |y + h|,$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2yh + h^2 = y^2 + 2yh + h^2,$$

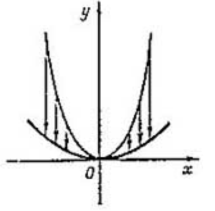
$$\Updownarrow$$

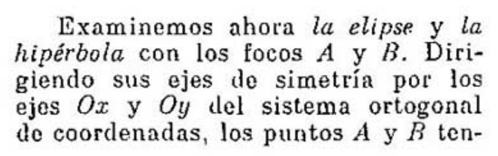
$$y = x^2/(4h)$$

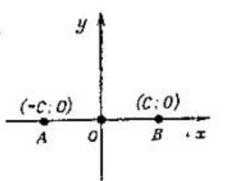
(basta con que $a = 1/(4h)$).

El gráfico de cualquier función $y = ax^2 + bx + c$, también es una parábola. Se obtiene de la parábola $y = ax^2$ mediante el traslado paralelo.

Empleando la homotecia $(x;\ y) \to (ax;\ ay)$ con el coeficiente a la parábola $y = x^2$ se transforma en la parábola $y = ax^2$. Así pues, todas las parábolas son semejantes entre sí. Pero las parábolas con distintos valores de a no son congruentes: cuanto mayor sea a, tanto más «agudo será el vértice» de la parábola. Señalemos, que la parábola $y = ax^2$ se puede obtener de la parábola $y = x^2$ mediante la compresión (o extensión) de una de las coordenadas; transformando $(x;\ y) \to (x\sqrt{a};\ y)$ así como también $(x;\ y) \to (x;\ y/a)$.




Examinemos ahora *la elipse* y *la hipérbola* con los focos A y B. Dirigiendo sus ejes de simetría por los ejes Ox y Oy del sistema ortogonal de coordenadas, los puntos A y B ten-



drán entonces las coordenadas $A(-c; 0)$ y $B\ (c;\ 0)$, obtendremos la siguiente ecuación de la elipse:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$(\text{donde } a > c). \quad (2')$$

Deshaciéndonos de los radicales, esta ecuación se puede presentar en una forma más cómoda:

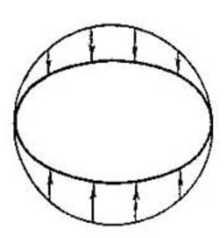
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ donde } b=\sqrt{a^2-c^2}. \quad (2)$$

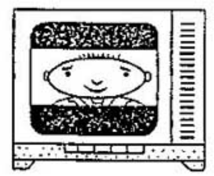
Cómo pasar de (2') a (2) lo veremos sucintamente más adelante.

De la ecuación (2) se deduce que la elipse se puede obtener también de la forma siguiente: tomando una circunferencia de radio a

$$x^2 + y^2 = a^2$$

y reduciendo sus ordenadas en la proporción a/b respecto al eje Ox. Durante una compresión semejante el punto $(x;\ y)$ pasará al punto $(x;\ y')$, donde $y' = yb/a$. (Sustituyendo $y = y'a/b$ en la ecuación de la circunferencia obtendremos la ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$). Por consiguiente, si usted tiene televisor puede obtener la elipse sin ayuda de hilos y clavos; sólo es necesario conectar la televisión cuando se está transmitiendo la imagen de sintonización y mover la manilla «desviación horizontal»; entonces, todas las circunferencias se convertirán en elipses. Se puede prescindir del televisor: la sombra que arroja sobre la mesa un plato inclinado también es una elipse.





Dos elipses son semejantes entre sí si tienen igual la relación b/a.

Eligiendo el mismo sistema de coordenadas que en el caso de la elipse, obtenemos la ecuación de la hipérbola

$$\left| \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \right| = 2a, \quad \text{donde } a < c, \qquad (3')$$

o, después de simplificarla,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ donde } b=\sqrt{c^2-a^2}. \quad (3)$$

Para estudiar el comportamiento de la hipérbola en un cuadrante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ trazaremos el gráfico de la función

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Es evidente que dicha función está definida si $x \geqslant a$ y cre monótonamente. Resulta menos claro que, a aumentar x, la hipérbola se va aproximando cada vez más sin llegar a alcanzar la recta $y = \frac{b}{a}x$, o sea, que como suele decirse tiene a esta recta como *asíntota*[1]). En total, la hipérbola tiene dos asíntotas: $y = bx/a$ y $y = -bx/a$.

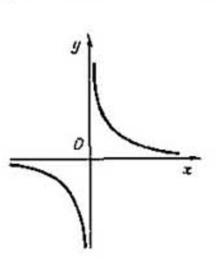
A menudo se choca con otra ecuación, cuyo conjunto de soluciones se

[1]) Más exactamente estas palabras significan que para toda secuencia x_n, que tiende a valores infinitamente grandes, la diferencia de $\left|\frac{b}{a}\sqrt{x_n^2-a^2}-\frac{b}{a}x_n\right|$ tiende a cero. Este hecho se puede demostrar fácilmente a partir de la igualdad:

$$x-\sqrt{x^2-a^2}=\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}.$$

llama hipérbola. Tal es la siguiente ecuación:

$xy = d$ (d es cierto número, $d \neq 0$). (4)

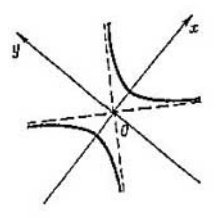


¿Qué sucede? ¿Es otra curva o es la misma?

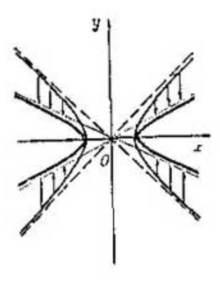
Por supuesto, la curva es la misma. Más exactamente: la ecuación $xy = d$ nos da una hipérbola con asíntotas perpendiculares. La ecuación ordinaria (3) para una hipérbola así tiene el siguiente aspecto:

$$\frac{x^2}{2d} - \frac{y^2}{2d} = 1,$$

pero se obtienen diferentes ecuaciones porque elegimos distintos sistemas de coordenadas: en un caso, por ejes de coordenadas tomamos las asíntotas de la hipérbola, mientras en el otro, sus ejes de simetría (?).



Antes hemos mostrado cómo se puede obtener una elipse comprimiendo una circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. De manera idéntica la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (con cualesquiera a y b) puede ser obtenida de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ de asíntotas perpendiculares, mediante la reducción respecto al eje Ox con el coeficiente a/b.



Dos hipérbolas son semejantes si tienen una misma proporción b/a o, lo que es el mismo, si es igual el ángulo 2γ entre la asíntotas ($\text{tg}\,\gamma = b/a$).

Liberación de los radicales. Mostraremos cómo de las ecuaciones (2′) y (3′) se pueden obtener simultáneamente otras más simples (2) y (3) (págs. 129—130). Supongamos que

$$z_1=\left(\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{2}\right)^2,$$

(3″)

$$z_2=\left(\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{2}\right)^2.$$

(2″)

No resulta difícil comprobar que $z_1+z_2=x^2+y^2+c^2$, $z_1z_2=c^2x^2$ y $z_1\leqslant z_2$, o sea, z_1 y z_2 son correspondientemente las raíces menor y mayor de la ecuación

$$z^2-(x^2+y^2+c^2)\,z+c^2x^2=0 \qquad (5)$$

Las raíces de esta ecuación no son negativas, y siempre $z_1\leqslant c^2$ mientras $z_2\geqslant c^2$, ya que el trinomio cuadrado de la parte izquierda es mayor de cero, si $z=0$, y menor de cero, cuando $z=c^2$

Observemos que, siendo $z\neq 0$ y $z\neq c^2$, la ecuación (5) se puede escribir así:

$$\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{z-c^2}=1. \qquad (5')$$

Supongamos que $a^2<c^2$, $a>0$. Entonces $z=a^2$ es la raíz menor de la ecuación (5), $0<z<c^2$; por consiguiente, la igualdad

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (6)$$

(a condición de que $0<a<c$) es equivalente a (3′).

Poniendo que $b=\sqrt{c^2-a^2}$, obtenemos: (3) $\Leftrightarrow$ (3′)

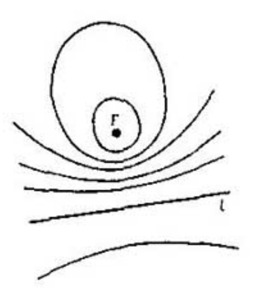
Supongamos que $a^2>c^2$, $a>0$ .Entonces $z=a^2$ es la raíz mayor de la ecuación

(5), $z > c^2$; luego la igualdad (6), a condición de que $a > c$, es equivalente a (2′). Poniendo $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ obtenemos que (2) $\Leftrightarrow$ (2′).

Esta demostración muestra el método que permite a menudo deshacerse de los radicales: examinar simultáneamente con esta expresión las «conjugadas», que se diferencian de ella por los signos de los radicales.

Fin del alfabeto. Examinemos, por último, otra función más sobre el plano, cuyo mapa de líneas de nivel incluye los tres tipos de curvas que han aparecido en este capítulo. Será la última letra de nuestro alfabeto.

N. *Sean el punto F y la recta l que no contiene a aquél. El conjunto cuyos puntos cumplen la condición de que sus distancias hasta un foco F y una recta l se encuentran en relación constante k, es una elipse (siendo $k < 1$), una parábola (siendo $k = 1$), o una hipérbola (siendo $k > 1$).*



Demostremos esto. Apliquemos el mismo sistema de coordenadas que en el punto «parábola». La ecuación del conjunto buscado:

$$\frac{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}}{|y+h|} = k;$$

siendo $k = 1$, como hemos visto, es equivalente a la ecuación de la parábola $y = ax^2$, donde $a = 1/(4h)$. Siendo $0 < k < 1$, puede reducirse al aspecto

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1 \text{ (elipse)} \tag{7}$$

y siendo $k > 1$, al aspecto

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-d)^2}{b^2}=1 \text{ (hipérbola)}, \qquad (8)$$

donde en los dos casos

$a = 2kh/\sqrt{|k^2 - 1|}$, $b = 2kh/|k^2 - 1|$,
$d = h(k^2 + 1)/(k^2 - 1)$.

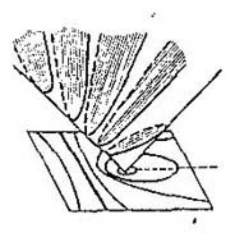
Las ecuaciones (7) y (8) se obtienen de las ordinarias (2) y (3) mediante el traslado paralelo, así como cambiando los papeles de x e y. Ahora los focos de las curvas se encuentran sobre el eje Oy, y los centros están desplazados hacia un punto $(0; d)$. Se puede comprobar que el punto F es el foco no sólo de la parábola, sino también de todas las elipses e hipérbolas. La recta l es su directriz.

Así pues, hemos aclarado que el conjunto de líneas de nivel de la función

$$f(M) = \rho(M, F)/\rho(M, l)$$

consta de una parábola, de elipses y de hipérbolas.

Podíamos haber adivinado que en la respuesta tenían que resultar estas curvas, «secciones cónicas» (véase las págs. 111 y 124), razonando de la manera siguiente. Examinemos dos funciones sobre el plano: $f_1(M) = \rho(M, F)$ y $f_2(M) = k\rho(M, l)$. El gráfico de la primera (véase la pág. 100) es la superficie de un cono, y el de la segunda consta de dos semiplanos inclinados (k es la tangente del ángulo de inclinación de dichos semiplanos con relación al horizonte). La intersección de estos dos gráficos es una elipse, una hipérbola o una parábola. Las proyecciones de estas curvas, situadas en el



plano inclinado, sobre el plano horizontal dan los conjuntos buscados

$$\{M : f_1(M) = f_2(M)\} = \{M : \rho(M, F) = $$
$$= k\rho(M, l)\}.$$

Al hacer la proyección, el aspecto de la curva cambiará igual que al comprimirla hacia la recta l (en $\sqrt{k^2+1}$ veces). Por esto, las curvas buscadas son también elipses, hipérbolas y parábola.

Como ya nos hemos convencido reiteradamente, las curvas a las que está dedicado el presente capítulo —elipses, hipérbolas y parábolas— tienen muchas propiedades comunes o muy parecidas. La afinidad entre estas curvas tiene una sencilla explicación algebraica: todas ellas se dan por ecuaciones de segundo grado. Por supuesto, las ecuaciones características para estas curvas (1), (2), (3), (4), o sea

$$y = ax^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

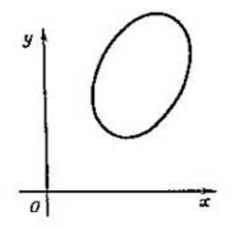
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad xy = d,$$

solamente se obtienen en sistemas de coordenadas referidas al centro. Si se elige otro sistema de coordenadas, puede obtenerse una ecuación más complicada. Sin embargo, no es difícil demostrar que en cualquier sistema de coordenadas las ecuaciones de estas

curvas tienen el aspecto

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + \\ + f = 0 \qquad (9)$$

(aquí a, b, c, d, e, f, son ciertos números, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$).



Resulta notable que sea cierto también a la inversa: cualquier ecuación de segundo grado $p(x, t) = 0$, o sea, la ecuación de tipo (9) determina una de las curvas conocidas. Vamos a formular un teorema más exacto.

La ecuación (9) *determina una elipse, una hipérbola o una parábola solamente, si la parte izquierda no se descompone en factores* (entonces se obtendría un par de rectas) *y toma los valores con distintos signos* (de otra forma se obtendría un punto, una recta o un conjunto vacío).

De ahí es claro el origen del nombre común de las elipses, hipérbolas y parábolas: «curvas de segundo grado».

El importante teorema algebraico sobre las ecuaciones de segundo grado que hemos formulado, es muy cómodo para encontrar los conjuntos de puntos que satisfacen a una condición geométrica: si vemos que en cierto sistema de coordenadas esta condición se expresa con una ecuación de segundo grado, significa que el conjunto buscado es una elipse, una hipérbola o una parábola. (Claro está, en un caso

degenerado puede obtenerse un par de rectas, una circunferencia —caso particular de una elipse—, un punto, etc.) Queda por hallar sus dimensiones y su situación en el plano (los focos, el centro, las asíntotas, etc.).

6.18. Hallar el conjunto de puntos, la suma de cuyas distancias hasta dos rectas dadas mutuamente perpendiculares es c veces mayor que la distancia hasta su punto de intersección.

6.19. En el plano hay dadas la recta l y el punto A. Determinar el conjunto de puntos:

a) la suma de las distancias desde los cuales hasta A y l es igual a c;

b) la diferencia de las distancias desde los cuales hasta A y l (según el módulo) es igual a c;

c) la relación de las distancias desde los cuales hasta A y l es menor de c, donde c es una constante mayor de 0.

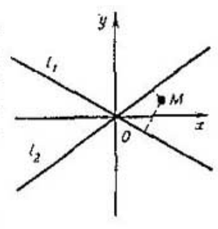
6.20. Hallar el conjunto de puntos

a) la suma

b) la diferencia

de los cuadrados de las distancias desde los cuales hasta dos dadas rectas que se cortan l_1, l_2 es igual a un valor fijo d. Trazar el mapa de las líneas de nivel de las funciones correspondientes:

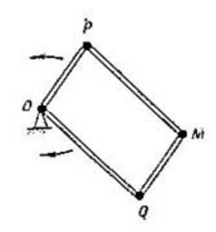
a) $f(M) = \rho^2(M, l_1) + \rho^2(M, l_2)$,



b) $f(M) = \rho^2(M, l_1) -$
$- \rho^2(M, l_2)$.

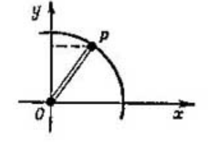
6.21. Sobre el plano hay dados el punto F y la recta l. Trazar el mapa de las líneas de nivel de las funciones:

a) $f(M) = \rho^2(M, F) + \rho^2(M, l)$,
b) $f(M)=\rho^2(M, F)-\rho^2(M, l)$.

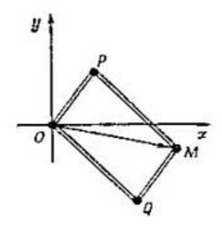


6.22. El vértice O de un paralelogramo articulado $OPMQ$ está fijado, y los lados OP y OQ giran a una misma velocidad angular en distintas direcciones. ¿Por qué línea se mueve el vértice M?

□Sea que $|OP| = p$, $|OQ| = q$. Como las rectas OP y OQ giran en diferentes direcciones, en cierto momento coinciden. Tomemos este momento por el comienzo de cálculo: $t = 0$, y las rectas coincidentes, por el eje Ox (el origen de las coordenadas lo situaremos en el punto 0). Supongamos que los lados OP y OQ giran a velocidad angular ω. Entonces las coordenadas de los puntos P y Q en el momento de tiempo t serán iguales, correspondientemente a



$(p \cos \omega t;\ p \operatorname{sen} \omega t)$,
$(q \cos \omega t;\ -q \operatorname{sen} \omega t)$.

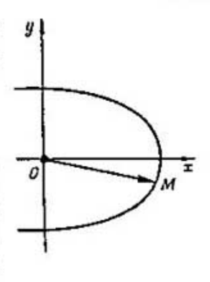


Por consiguiente, las coordenadas del punto $M(x; y)$ serán

$x = (p + q) \cos \omega t$,
$y = (p - q) \operatorname{sen} \omega t$

(ya que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$). Por lo tanto el punto M recorre una elipse

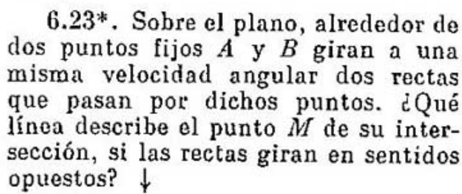
$$\frac{x^2}{(p+q)^2} + \frac{y^2}{(p-q)^2} = 1. \quad \square$$



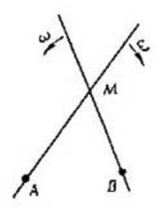
En la resolución de este problema hemos obtenido una elipse como un conjunto de puntos (x, y) del aspecto

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \operatorname{sen} \omega t \qquad (10)$$

(t es cualquier número real). Las ecuaciones de este tipo, que expresan las coordenadas (x, y) a través de un parámetro complementario t, se llaman *paramétricas*. En el caso dado, como parámetro variable figura el tiempo.



6.23*. Sobre el plano, alrededor de dos puntos fijos A y B giran a una misma velocidad angular dos rectas que pasan por dichos puntos. ¿Qué línea describe el punto M de su intersección, si las rectas giran en sentidos opuestos? ↓



6.24*. Hallar sobre el plano el conjunto de puntos M para los cuales $\widehat{MBA} = 2\widehat{MAB}$, donde AB es un segmento dado en el plano. ↓

6.25*. a) Examinemos todos segmentos que de un ángulo dado cortan un triángulo de cierta área S. Demostrar que los puntos medios de estos segmentos se hallan sobre una misma hipérbola G cuyas asíntotas son los lados del ángulo. ↓

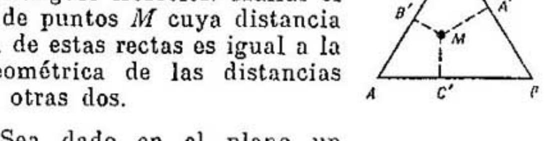
b) Demostrar que todos estos segmentos tienen tangencia con la hipérbola G. ↓

c) Demostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola situado entre las asíntotas se divide por el punto de tangencia por la mitad. ↓

6.26*. a) Sea un triángulo isósceles ABC ($|AC| = |BC|$).

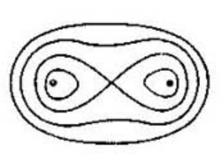
Hallar el conjunto de puntos M del plano cuya distancia hasta la recta AB es igual a la media geométrica de las distancias hasta las rectas AC y BC.

b) Tres rectas, intersecándose, forman un triángulo isósceles. Hallar el conjunto de puntos M cuya distancia hasta una de estas rectas es igual a la media geométrica de las distancias hasta las otras dos.



6.27. Sea dado en el plano un rectángulo $ABCD$. Hallar el conjunto de puntos M para los cuales se cumple la condición $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$.

Curvas algebraicas. Resulta evidente que los conjuntos de puntos con que se puede chocar en los problemas geométricos no se limitan a las rectas y curvas de segundo orden. Expondremos dos ejemplos.



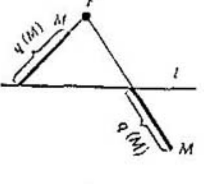
El conjunto de puntos para los cuales el producto de sus distancias hasta dos puntos fijos F_1 y F_2 es igual a cierto valor positivo p, se llama

óvalo de Cassini. En la figura viene mostrada toda una familia de estas curvas, es decir, la familia de líneas de nivel de la función

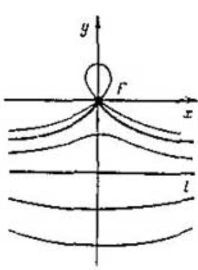
$$f(M) = \rho(M, F_1) \cdot \rho(M, F_2).$$

Las ecuaciones de dichas curvas se pueden escribir además así:
$[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2+y^2] = p^2$.
Particularmente es interesante el óvalo de Cassini en forma de «ocho» que resulta siendo $p = c^2$. Para $p < c^2$, la curva consta de dos pedazos separados que rodean los puntos F_1 y F_2.

Otro ejemplo. Sean el punto F y la recta l. Designemos por $q(M)$ la distancia desde el punto M hasta el punto de intersección de las rectas FM y l. El conjunto de puntos $\{M: q(M) = d\}$ se llama *concoide de Nicomedes.* Su ecuación en el sistema de coordenadas, donde F es el origen de las coordenadas y l se da con la ecuación $y + a = 0$, se escribe de la siguiente forma:



$$(x^2 + y^2)(y + a)^2 - d^2y^2 = 0.$$



En general, la recta que se da según la ecuación $P(x, y) = 0$, donde $P(x, y)$ es un polinomio de x e y, se llama *curva algebraica.* El grado del polinomio P (a condición de que no se descomponga en factores) se llama *grado* de dicha curva. Por lo tanto, el óvalo de Cassini y la concoide son curvas de cuarto grado. Ya de estos

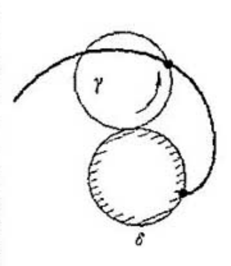
dos ejemplos se ve que las curvas algebraicas (de grado mayor de 2) pueden poseer formas caprichosas, tener puntos singulares (puntos de pico, como la concoide cuando $a = d$, puntos de retroceso, dobles, etc.); el aspecto de estas curvas varía notablemente al cambiar los parámetros. En el siguiente parágrafo chocaremos todavía con algunas curvas nuevas.

7 Rodaduras y trayectorias

En este parágrafo conclusivo presentaremos al lector curvas notables, las cuales quedan definidas de modo natural como la trayectoria de puntos de una circunferencia que rueda sobre una recta o sobre otra circunferencia. Sus propiedades más interesantes están relacionadas con las tangentes. Al comienzo del libro hemos dicho que la envolvente de la familia de segmentos del problema 0.1, relativo al gato, es una curva con cuatro puntos de retroceso: la astroide. Aquí el lector encontrará la explicación de este hecho y verá también por qué una mancha luminosa en una taza, formada por los rayos reflejados, tiene una particularidad característica: un punto de pico. El aficionado a la geometría clásica se enterará de cómo están relacionadas entre sí la circunferencia de los nueve puntos del triángulo, las rectas del mismo de Simpson y la envolvente de ellas: curva cicloidal con tres puntos de retroceso.

Al principio estudiaremos detalladamente una de las curvas cicloidales más sencillas.

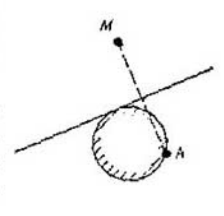
La cardioide. Por lo general, esta curva se define como la trayectoria de un punto que realiza el siguiente movimiento complejo: una circunferencia rueda exteriormente sin deslizamiento por otra circunferencia inmóvil de igual radio; la trayectoria de un punto de la circunferencia móvil se llama *cardioide*. Se pueden dar también otras definiciones geométricas de la cardioide. Formularemos dos de ellas en forma de problema.



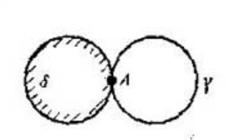
7.1. Demostrar que:

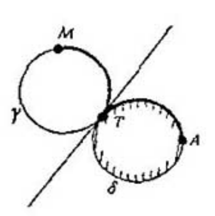
a) el conjunto de puntos simétricos a cierto punto A de una circunferencia dada con relación a todas las tangentes posibles a la circunferencia es una cardioide;

b) el conjunto de pies de las perpendiculares trazadas desde un punto A de dada circunferencia a todas las tangentes posibles a ella es una cardioide.



☐ a) Examinemos una circunferencia móvil γ que se encuentra en contacto con otra fija δ de igual radio en el punto A. Rodemos la circunferencia γ por la circunferencia δ y sigamos la trayectoria del punto M de la circunferencia móvil que en el momento inicial coincide con el punto A.





Suponemos que la rodadura se realiza sin deslizamiento. Esto quiere decir que en cada momento de tiempo las longitudes de los arcos AT y MT son iguales (T es el punto de tangencia variable de las circunferencias). Por consiguiente, el punto M es simétrico al punto A respecto a la tangente trazada en el punto T.

Durante una vuelta completa el punto T recorre toda la circunferencia, y el punto M, toda la cardioide.

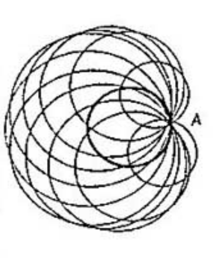
b) Está claro que este conjunto se obtiene de aquél, acerca del cual se habla en el punto a), por homotecia con el coeficiente 1/2 y cuyo centro es A. Así pues, este conjunto es también una cardioide, pero de la mitad de tamaño. □

Aplicando el problema 7.1 se puede trazar el número que se quiera de puntos de la cardioide y, así dibujarla con bastante exactitud. La cardioide es una curva cerrada que tiene una particularidad característica en el punto A: un «punto cuspidal». Por la forma se parece al corte de una manzana o, algo menos, al contorno del corazón. De ahí su nombre (kardia significa corazón).

La siguiente y bella definición de la cardioide, en que ella aparece como la «envolvente de circunferencias» emana también del problema 7.1.

7.2. Sean una circunferencia y en ella el punto A. Demostrar que la

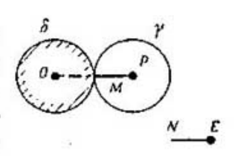
reunión de todas las circunferencias que pasan por el punto A, cuyos centros están sobre dada circunferencia, es una zona limitada por la cardioide. ↓



Suma de rotaciones. Más adelante demostraremos ciertos métodos que permiten establecer las propiedades geométricas de las curvas mediante la cinemática y como ejemplo recurriremos reiteradamente a la cardioide. Pero antes de continuar analicemos la última frase del problema 7.1, a).

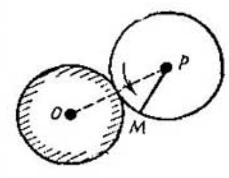
Hemos dicho que el punto T vuelve a la posición inicial A *después de una revolución entera*. Como tenemos que vérnoslas simultáneamente con varios giros, esta frase hay que precisarla: ¿de qué «revolución», o sea, de que giro estamos hablando? Se tenía en cuenta que el centro P de la circunferencia móvil γ (así como también el punto de tangencia T) daba una vuelta completa. La misma circunferencia γ (tal vez aquí sería mejor decir «círculos γ», imaginándolo en forma de disco) durante eso gira alrededor de su centro P con bastante rapidez. Vamos a aclarar la siguiente pregunta.

7.3. Supongamos que el centro P del círculo móvil γ, que rueda por el círculo inmóvil del mismo radio, da una vuelta. ¿Cuántas veces durante este tiempo girará el círculo γ

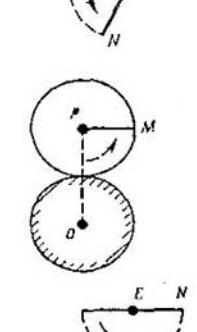


(cuántas revolucionas hará alrededor de su centro P)?

□ Para seguir el giro del círculo γ trazaremos sobre él cierto radio PM; fijemos en algún lugar del plano un punto E y examinemos un segmento $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{PM}$. La pregunta formulada en el problema 7.3 consiste en lo siguiente: ¿cuántas vueltas dará el segmento EN alrededor de su extremo E mientras el segmento OP gire en 360°? Con otras palabras, ¿cuál es la relación de las velocidades angulares de estos segmentos?



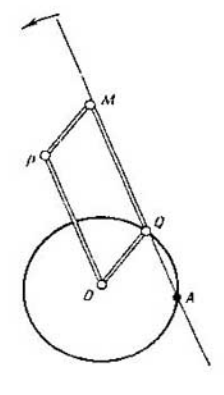
Para responder a esta pregunta basta con examinar dos posiciones del círculo móvil. De la figura se ve que cuando el radio OP ha girado en 90°, el segmento EN lo ha hecho en 180°. Lo mismo tendrá lugar y en adelante. Al final, cuando el radio OP haya girado en 360°, el segmento EN lo habrá hecho en 720°, o sea, habrá dado dos vueltas completas. (La relación de las velocidades angulares es igual a 2.) Tal es la respuesta al problema 7.3. □



Si como punto E de la solución del problema 7.3 se toma el centro O del círculo inmóvil y desde él marcamos el segmento $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PM}$, obtendremos el paralelogramo $OPMQ$. Durante la rodadura uniforme del círculo γ por el δ, el vértice O está inmóvil, mientras que los lados OP y OQ

giran a las velocidades angulares ω y 2ω, correspondientemente (en la misma dirección). De esta forma, obtenemos una definición más de la cardioide, utilizando el modelo cómodo de un paralelogramo articulado: *si los lados OP y OQ* ($|OP| = 2|OQ|$) *giran alrededor del punto O a velocidades angulares* ω *y* 2ω, *la trayectoria del cuarto vértice M del paralelogramo OPMQ es una cardioide.*

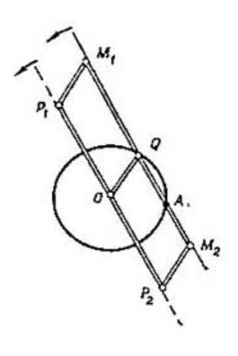
Ahora es fácil fundamentar otro método de trazamiento de los puntos de la cardioide y obtener algunas otras propiedades interesantes de ésta.



7.4. Si en cada recta l que pasa por el punto A de la circunferencia δ de radio r, desde el punto Q de intersección de l y δ ($A \neq Q$) se marca el segmento QM de $2r$ de longitud, el conjunto de todos los puntos M obtenidos así será una cardioide.

□ Para cada situación de la recta l se puede trazar un paralelogramo $OPMQ$ en el cual Q y M son los mismos que en el enunciado del problema. Entonces, durante el giro de la recta l alrededor del punto A a la velocidad angular ω, los lados OP y OQ del paralelogramo girarán justamente a las velocidades necesarias ω y 2ω (según el teorema del «anillo en la circunferencia» del § 1); por

esto el punto M recorrerá una cardioide. □

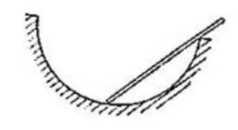


Pruebe a trazar en una hoja grande una cardioide utilizando los problemas 7.1 y 7.4, y convénzase de que se obtiene la misma curva. Quizás el segundo método sea más cómodo. Señalemos que, en el problema 7.4, el segmento QM de $2r$ de longitud podemos marcarlo desde el punto Q hacia ambos lados. Así obtendremos dos puntos M_1 y M_2 de la cardioide; éstos corresponden a dos posiciones opuestas del paralelogramo articulado (si el punto Q da una vuelta completa y vuelve a la situación inicial, el lado OM girará en 180°, y M_1 pasará a M_2). Esta circunstancia conlleva a la propiedad siguiente.

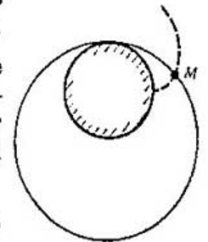
7.5. Demostrar que cualquier cuerda M_1M_2 de la cardioide que pasa por el punto de retroceso A de ésta tiene $4r$ de longitud y su punto medio se halla sobre la circunferencia inmóvil (de radio r), correspondiente a la cardioide.

He aquí dos problemas más en los que se emplea el segundo método de trazamiento de la cardioide.

7.6. Un palo de longitud $2r$ se mueve en el plano vertical de tal modo que su extremo inferior se apoya sobre el fondo de un hoyo semicircular (en su sección vertical) de radio r y, además, tiene tangencia con un borde

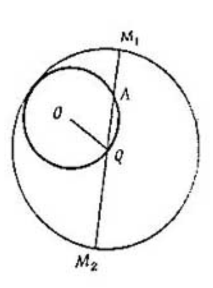


del hoyo. Demostrar que el extremo del palo se mueve por una cardioide.

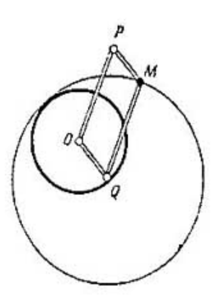


7.7. Por un círculo inmóvil de radio r rueda sin deslizamiento, abarcándolo, un aro de radio $2r$. Demostrar que la trayectoria de un punto del aro es una cardioide.

□ Una de las soluciones de dicho problema se puede obtener si éste se compara con el teorema de Copérnico 0.3, pues aquí se trata de las mismas dos circunferencias, pero con la única diferencia de que el círculo interior de radio r es inmóvil y por él rueda una circunferencia exterior de radio $2r$. En estas circunstancias el teorema de Copérnico muestra que si en el aro colocamos un palo, que cumpla el papel de diámetro M_1M_2, durante la rodadura éste pasará por el punto A fijado de la circunferencia inmóvil. El punto medio Q del palo M_1M_2 se moverá por la circunferencia inmóvil δ, y $|M_1Q| = |QM_2| = 2r$. Así, retornamos al problema 7.4 y vemos que los puntos M_1 y M_2 se mueven por una misma cardioide.

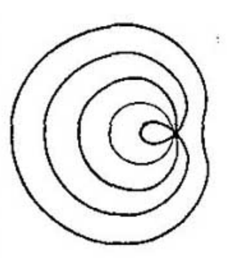


Se puede razonar de una forma un poco distinta, reduciendo todo al paralelogramo articulado. Supongamos que M es un punto del aro al que examinamos, y Q, su centro (variable). Tracemos el paralelogramo $OPMQ$. Si giramos el elemento OQ a la velocidad angular 2ω, el aro, y con éste el

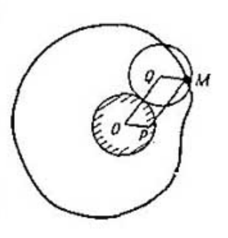


elemento QM, girará a la velocidad angular ω. □

La curva que hemos examinado bastante detalladamente —cardioide— se incluye, naturalmente, en la familia de curvas que se llaman *concoides del círculo* o *caracoles de Pascal*: si en los enunciados del problema 7.4 en la recta l, que pasa por el punto A, se marca el segmento QM de cierta longitud constante h (hacia uno y otro lados), para cada $h > 0$ obtendremos una de estas curvas; siendo $h = 2r$, será una cardioide. (Compare la definición de estas curvas con la definición de la concoide en el § 6, pág. 141). Resulta que al caracol de Pascal, teniendo en cuenta cada h, se le puede dar una definición cinemática. Esto se hace en el problema siguiente.



7.8. a) Demostrar que el vértice M de un paralelogramo articulado en el cual el vértice O está fijo y los lados OP y OQ giran a las velocidades angulares 2ω y ω, describe el caracol de Pascal.



b) En el plano se halla fija una circunferencia de radio r. Por ella gira otra de igual radio, a la que está sujeto rígidamente un plano (móvil). Demostrar que cualquier punto de éste describe el caracol de Pascal.

c) El mismo problema, pero en vez de una circunferencia móvil de radio r figura un aro de radio $2r$ que abarca la inmóvil.

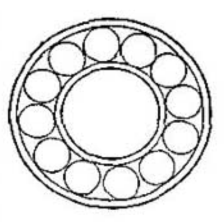
Ahora plantearemos problemas en los cuales es menester comprender la suma de rotaciones con otra relación de las velocidades que en la cardioide y se mencionan algunas curvas cicloidales presentadas en la figura de las págs. 154-155.

7.9. Sobre una circunferencia inmóvil de radio R rueda (por fuera) un

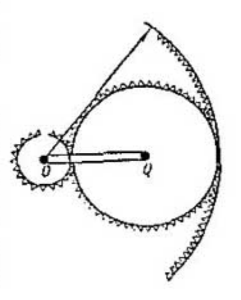
círculo cuyo radio es: a) $R/2$, b) $R/3$, c) $2R/3$. ¿Cuántas vueltas dará éste mientras su centro describa una vuelta alrededor del centro de la circunferencia inmóvil? ↓

7.10. El mismo problema, pero tomando en consideración que el círculo rueda por el interior.

7.11. Entre el eje de un rodamiento cuyo diámetro es 6 mm y su collar inmóvil de diámetro 10 mm están situadas unas bolas de 2 mm de diámetro. Considerando que, cuando el eje gira, las bolas ruedan por éste y por el collar inmóvil sin deslizamiento, determinar a qué velocidad angular: a) giran las bolas; b) corren sus centros alrededor del centro del rodamiento, si el eje realiza 100 revoluciones por segundo.

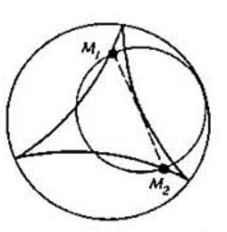


7.12. El engranaje que hace girar a la piedra de afilar tiene la estructura mostrada en el dibujo. Determinar la relación entre los radios de las ruedas móviles que permiten a la rueda pequeña (la afiladora) girar 12 veces más rápidamente que a la manilla OQ de accionamiento.

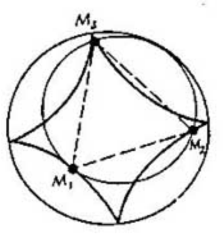


Examinemos dos puntos de la circunferencia que rueda por un círculo. Es evidente que ellos describen trayectorias congruentes. En particular, puede suceder también que las trayectorias coincidan: los dos puntos se mueven por una línea, uno tras otro. Así, en

la solución del problema 7.7 aclaramos que los puntos diametralmente opuestos del aro describen la misma cardioide. De esto podíamos habernos convencido observando que sus trayectorias tienen el punto de retroceso en el mismo lugar de la circunferencia inmóvil. En los problemas siguientes se puede emplear observaciones análogas.



7.13. a) Demostrar que los puntos diametralmente opuestos M_1M_2 de una circunferencia de radio $2R/3$ que rueda por el interior de una circunferencia de radio R, describen una misma *curva de Steiner*. ↓

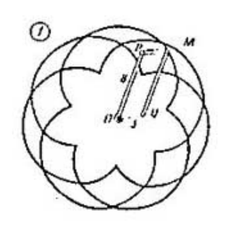


b) Demostrar que tres puntos M_1, M_2 y M_3 de una circunferencia de radio $3R/4$ situados en los vértices de un triángulo equilátero engendrarán una misma curva *—astroide—*, si la circunferencia rueda (por el interior) de una circunferencia de radio R.

c) El mismo problema, pero en el que, en vez de $3R/4$, tenemos $3R/2$, y en vez de astroide, resultará *una nefroide* (y la circunferencia-aro móvil abarca a la inmóvil).

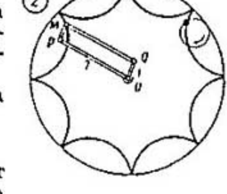
Las tres curvas con cuyos nombres hemos chocado *—la curva de Steiner* (también llamada *deltoide*), *la astroide* (de astro: «estrella») y *la nefroide* (de nephros: «riñón») se obtienen aquí de un modo un poco distinto que en su definición, ofrecida en las págs. 154—155.

Vamos a llamar *k-cicloide* la curva que describe el vértice M de un paralelogramo articulado $OPMQ$, en el cual el vértice O está fijo, mientras los elementos OP y OQ giran alrededor de éste; además, la relación de las velocidades angulares ω_{OP}/ω_{OQ} es igual a k, y la relación $|OP|/|OQ|$ entre las longitudes de dichos elementos, es igual a $1/|k|$ ($k \neq 0, +1, -1$).

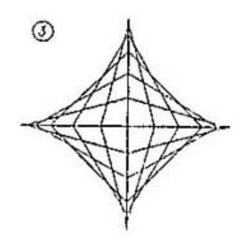


Si dos puntos P y Q avanzan uniformemente por una circunferencia de modo que la relación ω_P/ω_Q entre sus velocidades angulares es igual a k, la envolvente de las rectas PQ será una k-cicloide (7.19).

Las formas de la k-cicloide y de la $(1/k)$-cicloide coinciden (7.14).

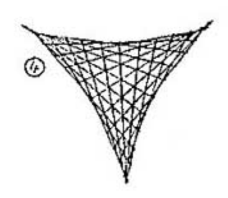


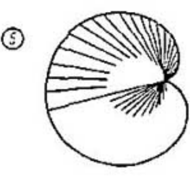
La k-cicloide también se puede definir como la trayectoria engendrada por un punto de una circunferencia de radio r que rueda sin deslizamiento por otra de radio $|k-1|r$, además, siendo $k > 1$, la tangencia de las circunferencias es externa, mientras que siendo $k < 1$, interna.



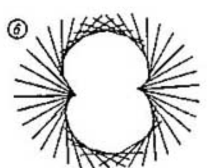
Corrientemente, las k-cicloides se llaman *epicicloides*, siendo $k > 0$, e *hipocicloides*, siendo $k < 0$.

En las figs. 1—6 vienen mostrados las k-cicloides para $k = 3/8$, $-1/7$, -3, -2, 2 y 3. Las cuatro últimas curvas tienen nombres especiales: *astroide*, *curva de Steiner*, *cardioide* y *nefroide*. En las figs. 3—6 están mostradas algunas propiedades de la familia de segmento relacionados con estas cur-

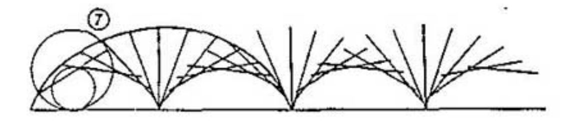




vas; todos los segmentos en cada una de las figuras tienen la misma longitud (7.4, teorema sobre los dos círculos en la pág. 156, 7.21).



En la última fig. 7 está representada la trayectoria de un punto de la circunferencia que rueda por una recta. Esta curva se llama *cicloide*. La envolvente de los diámetros



de la circunferencia rodante es una cicloide dos veces menor (teorema sobre los dos círculos).

En el ejemplo de la cardioide ya hemos visto que una misma curva puede ser obtenida como la trayectoria de los puntos de dos circunferencias distintas que ruedan sobre una misma circunferencia inmóvil (compárese la primera definición de la cardioide y el problema 7.7: en un caso, el centro de la circunferencia móvil es el vértice P de un paralelogramo articulado

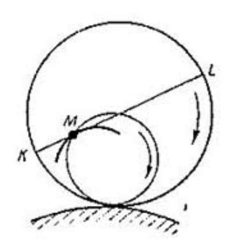
$OPQM$; y en el otro, su vértice Q). El siguiente problema indica qué relaciones tiene que haber, en el caso general, entre los radios de las circunferencias para que las trayectorias resulten congruentes.

7.14. a) Demostrar que un punto de un círculo de radio r, que rueda por el exterior de otro inmóvil de radio R, y un punto de un aro de radio $R + r$, que abarca el círculo, describen trayectorias congruentes.

b) Demostrar que un punto del círculo de radio r, que rueda por el interior de una circunferencia de radio R, y un punto del círculo cuyo radio sea $R - r$, engendran trayectorias congruentes. ↓

Para resolver estos dos problemas hay que aprender a calcular las relaciones entre las velocidades de rotaciones complejas. Más adelante hablaremos de cómo hacerlo; pasaremos a las propiedades más interesantes de las curvas cicloidales, a saber, a las propiedades de sus tangentes.

Teorema sobre dos círculos. Formularemos una regla curiosa, la cual permite describir de un modo palpable la familia de tangentes a la trayectoria del punto M de una circunferencia de radio r que rueda sin deslizamiento por cierta línea γ. Sobre esta misma línea rueda otra circunferencia de radio $2r$ junto con su diámetro KL

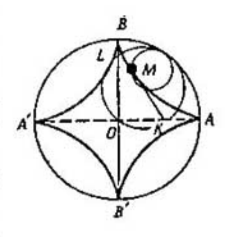


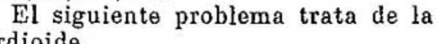
(sujeto rígidamente a ésta). Además el diámetro lo eligiremos de modo que en cierto momento su extremo K y el punto M coincidan en el mismo punto A de la línea γ. Resulta que, entonces, en todo momento de tiempo *el diámetro KL tiene tangencia con la trayectoria del punto M*. Con otras palabras, esta *trayectoria sirve de envolvente para todas las posiciones del diámetro KL*.

A esta cómoda regla es a la que hemos denominado *teorema sobre dos círculos*. De su demostración hablaremos más tarde. Ahora nos limitaremos a la siguiente precisión. Si dos circunferencias, de las cuales se habla en el teorema, ruedan simultáneamente de modo que sus puntos de contacto con la curva γ coinciden todo el tiempo, la circunferencia menor rodará por la mayor sin deslizamiento. Entonces, según el teorema de Copérnico, el punto M se desplazará por el diámetro fijo KL de la circunferencia mayor. Y nuestro teorema sobre dos círculos afirma que la recta KL será la tangente trazada en el punto M a la trayectoria del mismo.

Pasemos a ejemplos. Empezaremos por la familia de rectas acerca de la cual hemos hablado en la introducción al libro. Supongamos que una circunferencia de radio r, en la cual está señalado el punto M, rueda por el interior de una circunferencia de radio

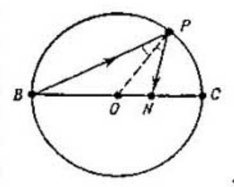
$R = 4r$. Simultáneamente con la primera rodemos otra circunferencia de radio $2r$ junto con su diámetro KL (además en el momento inicial los puntos K y M coinciden con el punto A de la circunferencia inmóvil). Según el teorema de Copérnico, los extremos del diámetro KL se deslizan por dos diámetros mutuamente perpendiculares AA' y BB' de la circunferencia inmóvil. Al mismo tiempo, de acuerdo con el teorema sobre dos círculos, el diámetro KL durante su movimiento tiene tangencia con la trayectoria del punto M, o sea, *que como envolvente de las rectas KL resultará la astroide con puntos de retroceso en A, B, A', B'.*





El siguiente problema trata de la cardioide.

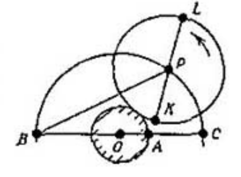
7.15*. Sobre una circunferencia tenemos cierto punto B. De éste a un punto arbitrario de la circunferencia incide un rayo de luz, reflejándose de la misma (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión). Demostrar que la envolvente de los rayos reflejados es una cardioide.



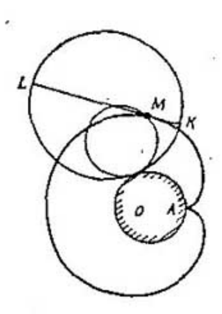
□ Designemos por O el centro de la circunferencia «especular» dada y por C, su punto diametralmente opuesto B. Supongamos que el rayo BP, después de reflejarse en el punto P, incide en el punto N del segmento BC (por ahora consideramos que $\widehat{PBC} \leqslant$

$\leqslant 45°$). Entonces, $\widehat{PNC} = \widehat{BPN} + \widehat{PBN} = 3\widehat{PBC}$. O sea, si giramos el rayo BP a una velocidad angular ω, el rayo reflejado girará a la velocidad angular 3ω; además, el punto de reflexión P se moverá por la circunferencia «especular» a la velocidad angular 2ω («teorema sobre el anillo» del § 1). Es evidente, que esta relación se conservará también siendo $\widehat{PBC} > 45°$.

La familia de rectas PN que nos interesa se puede obtener de la manera siguiente. Vamos a rodar exteriormente sobre una circunferencia inmóvil de radio $r = |OB|/3$ con el centro O otra de radio $2r$ junto con su diámetro KL que en el momento inicial se encontraba en la recta BC. Si el centro P de esta última se desplaza (por la primera de radio $3r$ con el centro O) a la velocidad angular 2ω, el diámetro KL girará a la velocidad angular 3ω (?), lo mismo que el rayo reflejado.

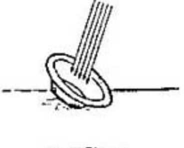


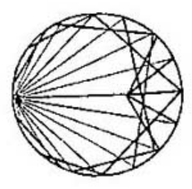
Según el teorema sobre dos círculos, la envolvente de la familia de las rectas KL será la trayectoria del punto M en una circunferencia de radio r que rueda exteriormente sobre otra del mismo radio r y con el centro O, o sea, una cardioide; en el momento inicial el punto M coincide con el punto A, que divide el segmento BC



en la relación de 2 : 1, este punto será justamente el punto de retroceso de la cardioide. □

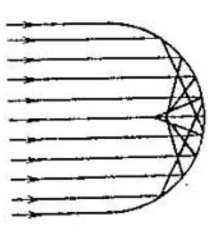
Este «punto de retroceso» en forma de una mancha clara, constituida por los rayos reflejados, podemos verlo a menudo en el fondo de una taza o una cazuela inclinada con relación a los rayos que inciden de una lámpara o del sol. Claro está que en este experimento el haz incidente de rayos sería natural considerarlo paralelo, y no proveniente del punto de una circunferencia. Entonces, en la respuesta obtendremos no precisamente una cardioide, sino otra curva con el punto de retroceso parecido, por cierto que también conocemos.





7.16. Demostrar que si sobre un espejo semicircular incide un haz paralelo de rayos (como se muestra en la figura), los rayos reflejados tienen tangencia con la mitad de la nefroide.

Si el espejo fuese parabólico, entonces, como ya sabemos del § 6, los rayos, después de reflejarse, se reunirían en un mismo punto; en el foco de la parábola. Esta comparación explica por qué la nefroide tiene también otro nombre: *línea focal del círculo.*

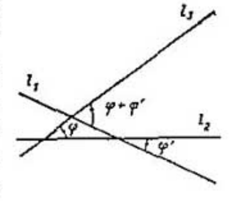


7.17. Hallar el conjunto de puntos que cubre el diámetro fijo de un círculo de radio r que rueda:

a) por el exterior de una circunferencia de radio r;
b) por el interior de una circunferencia de radio $3r/2$.

Algunos otros problemas interesantes relativos a las familias de tangentes aparecerán posteriormente después de que discutamos los razonamientos cinemáticos que se emplean en las soluciones de los últimos problemas y en la argumentación del teorema sobre dos círculos.

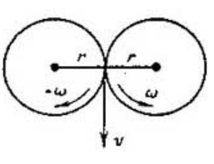
Velocidades y tangentes. Para determinar las relaciones entre las velocidades angulares en las rotaciones complejas con que hemos chocado, existen métodos más cómodos que aquél, bastante artesano, que hemos empleado en la solución del problema 7.4. Ante todo, tal es la regla de la suma de las velocidades angulares, análoga a la regla de la suma de las velocidades (lineales) cuando se pasa a un nuevo sistema de coordenadas.



Vamos a convenir que los ángulos (y las velocidades angulares) que corresponden a la rotación en sentido antihorario los consideraremos positivos, mientras los que giran en sentido horario, como negativos. En este caso, si la recta l_2 está virada en un ángulo φ' con relación a la recta l_1, y la recta l_3 en un ángulo φ respecto a la recta l_2, entonces l_3 forma el ángulo $\varphi + \varphi'$ con la recta l_1. Por esto, *si la figura γ_2 gira con relación a una figura*

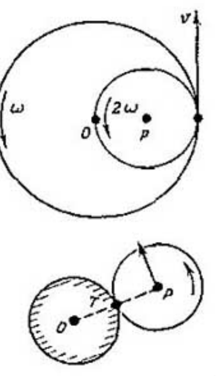
«inmóvil» γ_1 *a la velocidad angular* ω', *y* γ_3 *respecto a* γ_2 *a la velocidad* ω, *entonces resultará que* γ_3 *gira con relación a* γ_1 *a la velocidad* $\omega + \omega'$. (Como estamos tratando fundamentalmente de rotaciones de círculos, consideraremos que en cada uno de ellos está señalado cierto radio, para que sea más cómodo seguir su giro).

Mostraremos cómo se emplea esta regla. Examinemos primero dos círculos de radio r, cuyos centros están fijados a la distancia de $2r$ el uno del otro. Si los círculos giran sin resbalar, sus velocidades angulares son de igual valor, pero llevan signos opuestos: la del primero será, digamos, $-\omega$, y la del segundo, ω. En realidad, las velocidades lineales de los puntos en contacto de uno y de otro círculo son iguales (precisamente aquí se emplea el hecho de que los círculos no resbalan). Puesto que el valor v de la velocidad lineal del punto M, situado a la distancia r del centro del círculo que gira a la velocidad angular ω, es igual a $v = \omega r$, entonces de la igualdad de las velocidades lineales en nuestro caso se obtiene la igualdad de las velocidades angulares (según su magnitud absoluta). Ahora pasaremos al sistema de referencia relacionado con el primer círculo. Entonces, a todas las velocidades angulares hay que añadir ω: la velocidad del primero será 0, mientras la del segundo resul-



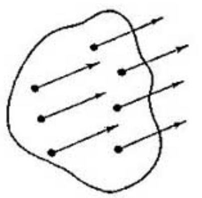
tará igual a 2ω. Esto lo hemos visto ya en el problema 7.4.

Otro ejemplo. Supongamos que la distancia entre los centros O y P (por ahora inmóviles) de dos circunferencias tangentes de radios $R = 2r$ y r es igual a r. Sus velocidades angulares serán correspondientemente igual a ω y 2ω (la relación entre sus magnitudes es inversamente proporcional a la relación entre los radios). En el sistema de referencia relacionado con la circunferencia mayor, sus velocidades angulares son $-\omega$ y 0 (este es el movimiento del que se habla en el teorema de Copérnico 0.3). En el sistema de referencia relacionado con la circunferencia menor, sus velocidades angulares son 0 y ω (el problema 7.7).

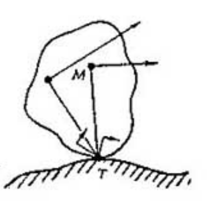


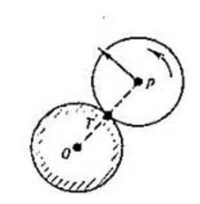
Sin embargo, al determinar las velocidades angulares se puede prescindir de la introducción de un sistema giratorio de referencia. Pero para esto tendremos que aclarar cómo determinar las velocidades (lineales) de los puntos de la rueda móvil. Esta cuestión será muy importante para nosotros en el punto siguiente, donde hablaremos de las tangentes a las curvas cicloidales. Así pues, volvamos al primer ejemplo: examinemos cierta posición del círculo de radio r que rueda sobre otro círculo del mismo radio; designemos por T el punto del círculo móvil que en el instante que estamos examinando coincide con el

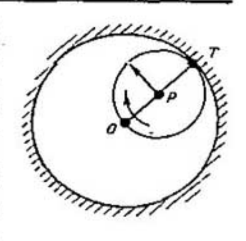
punto de tangencia de los círculos. Su velocidad es igual a cero (ya que el rodamiento transcurre sin deslizamiento). ¿Cómo hallar las velocidades de los demás puntos?



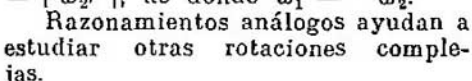
Para esto aplicaremos el siguiente teorema de **Mozzi**: en todo momento *las velocidades de los distintos puntos de una placa rígida, que se desplaza por un plano, o son como en el movimiento de avance de un cuerpo*, es decir, todas iguales en magnitud y dirección, *o son como en el cuerpo que gira*, es decir, la velocidad de cierto punto T es igual a cero, y la de cualquier otro punto es igual a la magnitud $|MT|\omega$ (donde ω es la velocidad angular de la placa) y está dirigida perpendicularmente al segmento MT. Precisamente este último caso tiene lugar para el disco rodante; además, el papel de punto T —«centro instantáneo de giro»—, lo hace el punto de tangencia. (Esto será justo incluso para una rueda oblicua que ande por un camino con baches). Aplicando esto, hallaremos la relación entre la velocidad angular ω_1 de la rueda rodante y la velocidad angular ω_2 a la que gira su centro P alrededor del centro O del círculo inmóvil. Para ello expresemos de dos formas la velocidad lineal del punto P: por una parte, su valor es igual a $2r\omega_2$; por otra, como T es el centro instantáneo, resulta igual a $r\omega_1$. Así, $2r\omega_2 = r\omega_1$, de donde $\omega_1 = 2\omega_2$.





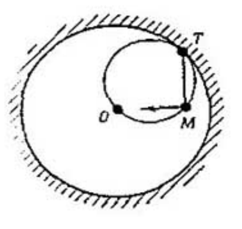


El mismo razonamiento para un círculo de radio r que rueda por el interior de una circunferencia de radio $2r$ de modo que su centro se mueve (por la circunferencia de radio r) a la velocidad angular $\omega_2 > 0$, da el siguiente resultado. Designemos la velocidad angular del círculo por ω_1 y observemos que $\omega_1 < 0$. Expresando la velocidad del punto P de dos formas, obtenemos: $|\omega_1 r| = |\omega_2 r|$, de donde $\omega_1 = -\omega_2$.



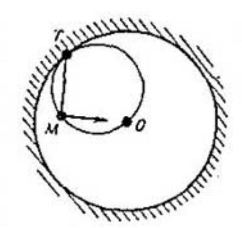
Razonamientos análogos ayudan a estudiar otras rotaciones complejas.

Mas para nosotros es especialmente importante que el teorema de Mozzi permite determinar la dirección de la velocidad en cada punto de la figura: la velocidad del punto M está dirigida perpendicularmente al segmento MT, que lo une con el centro instantáneo de giro T.

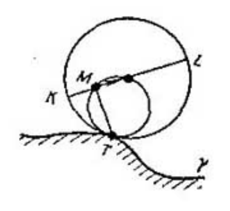


Expondremos otra demostración más del teorema de Copérnico. Sea M un punto de la circunferencia de radio r que rueda por el interior de otra de radio $2r$ con centro en O. En todo momento, la velocidad del punto M está dirigida perpendicularmente al segmento TM, donde T es el punto de contacto de las circunferencias (el centro instantáneo de giro de la circunferencia menor). De esta forma, las velocidades del punto siempre están dirigidas por la recta MO (pues T y O

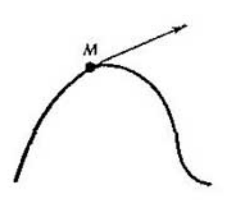
son los puntos diametralmente opuestos de la circunferencia menor). Consiguientemente, M se mueve por el diámetro de la circunferencia mayor, y en esto consiste precisamente el teorema de Copérnico.



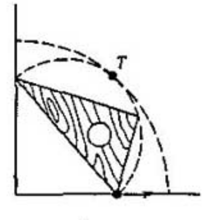
Ofrecemos la demostración del teorema sobre dos círculos. Por una curva (o una recta) γ ruedan simultáneamente dos circunferencias de radio r y $2r$. Designemos por M y K sus puntos que coinciden en el momento inicial con el punto A de la línea γ, y por T, el centro común instantáneo de las dos circunferencias (punto de contacto de éstas con γ). La velocidad del punto está dirigida perpendicularmente al segmento MT. Así pues, *la velocidad del punto M está dirigida por el diámetro de la circunferencia mayor*, lo significa que M pertenece a un determinado diámetro KL de dicha circunferencia y durante su movimiento la recta KL en cada momento tiene contacto con la trayectoria del punto M. En esto consiste justamente el teorema sobre dos círculos.



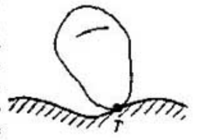
Observemos que aquí hemos empleado un nuevo punto de vista en cuanto a la definición de la tangente a una curva: *la tangente, a la trayectoria de un punto en movimiento, es una recta que pasa por el punto M de la trayectoria y cuya dirección coincide con la de la velocidad en el punto dado M.*



No vamos a exponer la demostración del teorema de Mozzi, pero indicaremos su análogo geométrico: todo traslado de un plano que se puede realizar sin darle la vuelta al otro lado (moviéndolo de cualquier forma por el mismo) es o un traslado paralelo o una rotación alrededor de cierto punto T (teorema de Chasles). En relación con el teorema de Mozzi subrayamos una circunstancia más. Para el movimiento más común de la placa por una superficie, el centro instantáneo durante el movimiento cambia su posición tanto en la superficie inmóvil como en la móvil (placa). Y allí y aquí traza cierta curva: una se llama *centroide inmóvil*, y la otra, *centroide móvil*. Por ejemplo, durante la rodadura de una rueda por un camino, la centroide inmóvil será el camino, y la móvil, la llanta de la rueda. En cinemática se demuestra un teorema que dice que, para todo movimiento de un plano, suficientemente «bueno» (sin «tirones»), *la centroide móvil rueda por la inmóvil sin deslizamiento* y, además, el punto de tangencia sirve en cada momento como centro instantáneo de giro. Así pues, el movimiento más común de la placa por una superficie se reduce a la rodadura de una rueda (oblicua) por un camino (con baches). Desde este punto de vista, el tema de nuestro capítulo se puede formular así: estudio de movimientos en los cuales las dos centroides son circunferencias.







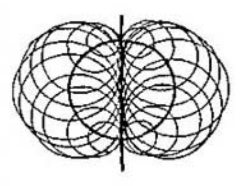
Con esto vamos a dar fin a la digresión que hemos hecho para tratar de la cinemática[1]): ahora estamos sufi-

[1]) Explicaciones más detalladas y exactas se pueden encontrar en cualquier manual de mecánica teórica, por ejemplo, en las magníficas «Conferencias de mecánica teórica» del matemático belga Ch.-J. Vallée Poussin.

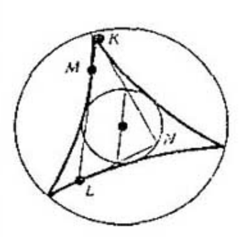
cientemente pertrechados para empezar a revelar las propiedades más notables de las curvas cicloidales relacionadas con las familias de tangentes a las mismas.

7.18. Demostrar que las tangentes a la cardioide trazadas en los extremos de una cuerda que pasa por el punto cuspidal de la misma, son mutuamente perpendiculares y su punto de intersección dista $3r$ del centro de la circunferencia inmóvil, donde r es el radio de ésta. ↓

7.19*. Por una circunferencia se mueven uniformemente dos transeúntes P y Q, la relación de las velocidades angulares entre los cuales es igual a k (k es diferente de 0,1 y −1). Hallar la envolvente de todas las rectas PQ. ↓



7.20*. Sean una circunferencia y una recta que pasa por su centro. Demostrar que la reunión de todas las circunferencias con centros en la circunferencia dada y tangentes a la recta, es un dominio limitado por una nefroide.

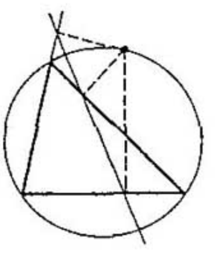


7.21*. Examinemos la curva de Steiner circunscrita alrededor de una circunferencia de radio $2r$. Demostrar que toda tangente a esta curva (en cierto punto M) corta a ésta en dos puntos K y L tales, que el segmento KL tiene una longitud constante $4r$; su punto medio se halla sobre la cir-

cunferencia inscrita dada; las tangentes en los puntos K y L a la curva son mutuamente perpendiculares y se intersecan en cierto punto N de dicha circunferencia, además los segmentos KN y LN se cortan en los puntos medios por la misma. ↓

7.22*. Examinemos una astroide circunscrita alrededor de una circunferencia de radio $2r$. Demostrar que desde cualquier punto P de la circunferencia inscrita se pueden trazar tres rectas PT_1, PT_2, PT_3, tangentes a la astroide, que éstas forman entre sí ángulos iguales (de 60°), y que los tres puntos de tangencia T_1, T_2, T_3 son los vértices de un triángulo regular inscrito en una circunferencia de radio $3r$, tangente a la circunferencia circunscrita alrededor de la astroide.

El siguiente problema —último de esta serie— que también permite dar la solución en el lenguaje del movimiento, revela una relación inesperada entre la geometría elemental del triángulo y la curva cicloidal que lleva el nombre del geómetra que descubrió esta relación.



7.23*. Sea el triángulo ABC. Demostrar que:

a) los pies de las tres perpendiculares, trazadas desde cierto punto de la circunferencia circunscrita a este triángulo, a las rectas AB, BC y AC

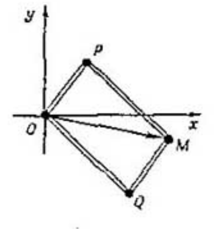
están sobre una recta (*«recta de Simpson»*);

b) los puntos medios de los lados del triángulo y los pies de sus alturas, así como los puntos medios de los segmentos de las alturas que unen el ortocentro con los vértices, están sobre una circunferencia *«la circunferencia de nueve puntos»*);

c) todas las rectas de Simpson del triángulo ABC son tangentes a *una curva de Steiner*, circunscrita alrededor de la circunferencia de los nueve puntos. ↓

Ecuaciones paramétricas. Todas las propiedades de las curvas cicloidales podrían demostrarse también analíticamente. Lo más cómodo de todo sería escribir sus ecuaciones en forma paramétrica, expresando las coordenadas $(x;\ y)$ del punto M a través del parámetro t (tiempo). Con dichas ecuaciones hemos chocado ya en el problema 6.22.

Examinemos la trayectoria del movimiento del cuarto vértice M del paralelogramo articulado $OPMQ$, en el cual el vértice O está en el origen del sistema de coordenadas. (Señalemos que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$). Si el punto P se mueve por una circunferencia de radio r_1 con el centro en el origen de las coordenadas O a la velocidad angular ω_1, y el punto Q se traslada por una circunferencia de radio r_2



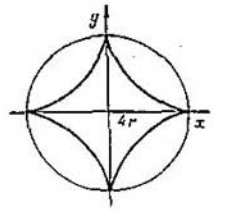
con el centro O a la velocidad angular ω_2, entonces, en el momento de tiempo t, las coordenadas de P serán $(r_1 \cos \omega_1 t;\ r_1 \operatorname{sen} \omega_1 t)$; las de Q, $(r_2 \cos \omega_2 t; r_2 \operatorname{sen} \omega_2 t)$, y las del cuarto vértice del paralelogramo $OPMQ$:

$$x = r_1 \cos \omega_1 t + r_2 \cos \omega_2 t,$$
$$y = r_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + r_2 \operatorname{sen} \omega_2 t$$

(en el momento incial $t = 0$, los dos lados OP y OQ del paralelogramo articulado estarán dirigidos por el eje Ox). En el problema 6.22 hemos aclarado que siendo $\omega_2 = -\omega_1$, el punto M describe una elipse. En el caso general, si se cumplen las correlaciones

$$\omega_1/\omega_2 = k,\ r_2/r_1 = |k|,$$

el punto M recorre una curva cicloidal (la que hemos llamado k-cicloide en la pág. 154).



De las ecuaciones paramétricas, excluyendo t, obtendremos en algunos casos ecuaciones simples que enlazan las coordenadas x e y. Examinemos como ejemplo la astroide. Para ésta $r_1 = 3r_2$, $\omega_2 = -3\omega_1$: podemos tomar $\omega_1 = 1$; entonces $\omega_2 = -3$ y las ecuaciones paramétricas de la astroide se escribirán así $(r_2 = r)$:

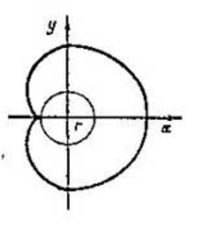
$$x = 3r \cos t + r \cos 3t,$$
$$y = 3r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 3t,$$

o aún más sencillamente (?):

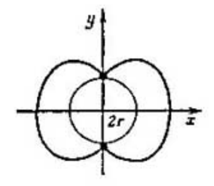
$$x = 4r \cos^3 t, \quad y = 4r \operatorname{sen}^3 t.$$

De aquí emana la siguiente ecuación breve de la astroide:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=(4r)^{2/3}.$$



La astroide y otras curvas que hemos estudiado antes pueden representarse con ecuaciones algebraicas. Pruebe a comprobar que los puntos $(x;\ y)$ de estas curvas satisfacen a las siguientes ecuaciones:

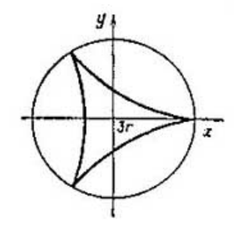


$$(x^2+y^2-4r^2)^3+108r^2x^2y^2=0$$ (astroide),

$$(x^2+y^2-2rx)^2-4r^2(x^2+y^2)==0$$ (cardioide),

$$(x^2+y^2-4r^2)^3--108x^2r^4=0$$ (nefroide),

$$(x^2+y^2+9r^2)^2+8rx(3y^2-x^2)--108r^4=0$$ (curva de Steiner).

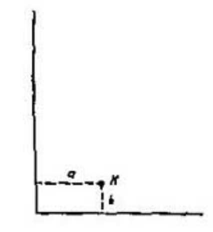


De este modo la astroide y la nefroide son curvas de sexto grado, y la cardioide y la curva de Steiner, de cuarto grado.

Se puede demostrar que, siendo $\omega_1/\omega_2 = k$ racional, las curvas cicloidales son algebraicas (y siendo k irracional, no; una curva semejante puede pasar tan cerca como se quiera de cualquier punto de un anillo con el centro O, limitado por las circunferencias de radios r_1+r_2 y $|r_1-r_2|$, y, como suele decirse «en todo lugar llenan densamente» el anillo).

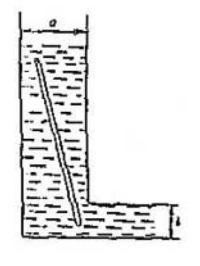
Comparando las ecuaciones de las curvas con sus propiedades geométri-

cas, se puede obtener nuevos corolarios interesantes. He aquí un ejemplo en el que se emplea la propiedad de la astroide.

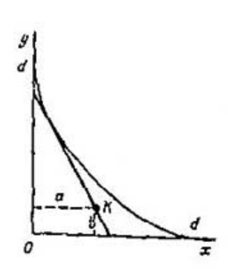


7.24. a) Sean un ángulo recto, y dentro de éste, el punto K, que de sus lados dista a y b. ¿Se podrá trazar por el punto K un segmento de longitud d con los extremos sobre los lados del ángulo?

b) Un canal, cuyas orillas son dos rectas paralelas, vira en ángulo recto; antes de virar su anchura es a, y después, b. ¿Cuál deberá ser el valor de d para que por este recodo pueda pasar un tronco delgado de longitud d?



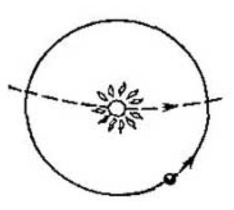
□ a) Tomemos los lados del ángulo por los ejes del sistema de coordenadas. Un segmento de longitud d tiene que tener contacto con la astroide, cuyos puntos de retroceso están alejados del centro a la distancia d. La ecuación de esta astroide es: $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$. Si el punto K está dentro del dominio limitado por una astroide y por los lados del ángulo, el segmento necesario existe (será el segmento de la tangente a la astroide trazada desde el punto K), y si el punto K está fuera de este dominio, entonces no existe. De esta forma, el segmento necesario existe solamente en el caso de que $a^{2/3} + b^{2/3} \leqslant d^{2/3}$.



Señalemos que, aunque hemos explicado cómo «trazar» el segmento ne-

cesario con ayuda de la astroide, si se cumple la condición $a^{2/3} + b^{2/3} \leqslant \leqslant d^{2/3}$, este problema no se puede resolver con ayuda del círculo y la regla.

Las curvas notables que hemos examinado en los dos últimos parágrafos, se conocen desde hace ya más de 20 siglos. Las principales propiedades de las elipses, de las hipérbolas y de las parábolas fueron descritas en el trabajo «Las secciones cónicas» por el matemático griego Apolonio de Perga, quien vivió casi en la misma época que Euclides (III siglo antes de nuestra era). Ya en la antigüedad, al estudio de las trayectorias de movimientos circulares complejos se dedicaron los astrónomos, y esto no nos debe sorprender: pues al considerar muy convencionalmente que los planetas giran alrededor del Sol sobre circunferencias en un mismo plano, entonces, visto desde la Tierra, el movimiento de otro planeta será precisamente un movimiento circular complejo. A medida que se acumulaban observaciones astronómicas, en la descripción de los movimientos planetarios con ayuda de curvas cicloidales complejas se iba introduciendo creciente cantidad de correcciones, hasta que J. Kepler estableció con gran exactitud que las trayectorias de los planetas son elipses, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.





Diversos problemas de física, mecánica y matemática relacionados con curvas concretas sirvieron de piedra de toque para notables métodos analíticos fundados en el siglo XVII por Descartes, Leibnitz, Newton, Fermat y otros científicos. Estos métodos dieron la posibilidad de pasar de casos particulares, relacionados con las curvas notables, a regularidades comunes, inherentes a clases enteras de curvas. Es claro, que, al calcular mecanismos y estructuras complejas, no se puede prescindir de los métodos analíticos. Sin embargo, las ideas palmarias a las que está dedicado este libro, suelen ser útiles incluso en los problemas que no están relacionados de manera alguna con la geometría: no en vano los resultados de las investigaciones o de los cálculos son presentados a menudo en forma de gráficos o de familia de líneas.

Respuestas, indicaciones, resoluciones.

1.13. Señalemos que el vértice M de los triángulos rectángulos AMB con la hipotenusa AB pertenecen a la circunferencia de diámetro AB.

1.14 Por el punto de cóntacto M de las circunferencias tracemos una tangente común. Supongamos que *M corta* la recta AB en el punto O. Entonces $|AO| = |OB| = |OM|$ (las longitudes de las tangentes trazadas desde el punto O a las circunferencias son iguales).

1.15. *Respuesta:* La reunión de tres circunferencias. Sean A, B, C y D los puntos dados. Tracemos por el punto A una recta l; por el punto C otra paralela a l, y por los puntos B y D rectas perpendiculares a l. Como resultado construiremos un rectángulo.

Sean L el centro del segmento AC, y K, el centro del segmento BD; entonces es fácil ver que $LMK = 90°$, donde M es el centro del rectángulo. Girando la recta l alrededor del punto A y, correspondientemente, las demás rectas, obtenemos que el conjunto de centros M de los rectángulos trazados es una circunferencia con el diámetro KL.

Por cuanto los cuatro puntos A, B, C, D se pueden dividir en dos pares de tres maneras: (A, C) y (B, D) ; (A, B) y (C, D); (A, D) y (B, C), todo el conjunto buscado consta de tres circunferencias.

1.25. *Respuesta:* Una recta, Si los transeúntes P y Q avanzan por rectas paralelas, es claro, que el centro del segmento PQ se traslada también por una recta paralela.

Supongamos que las rectas se intersecan en el punto O. Designemos el punto O como comienzo de cálculo. Entonces las velocidades $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ de los transeúntes son vectores dirigidos respectivamente a lo largo de

las rectas, y sus valores son iguales a la longitud del camino que recorre el transeúnte en unidad de tiempo t. Supongamos que el primer transeúnte en el momento de tiempo t se encuentre en el punto P, y el segundo, en el punto Q; entonces $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{b} + t\overrightarrow{v_2}$ (los vectores a y b determinan las posiciones iniciales de los transeúntes para $t = 0$).

El punto medio M del segmento PQ se halla, naturalmente, OD en un punto M tal que

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2} + t\frac{\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}}{2}.$$

Vemos que éste se desplaza asimismo por cierta recta uniformemente a la velocidad $\dfrac{\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}}{2}$. Para hallar esta recta es suficiente marcar el punto medio de las posiciones iniciales de los transeúntes y de sus posiciones, digamos, dentro de una unidad de tiempo.

Los cálculos con los vectores se pueden sustituir por este razonamiento geométrico.

Si P_0P_1 y Q_0Q_1 son dos segmentos cualesquiera (no paralelos), entonces M_0M_1 , en el que M_0 y M_1 representan los puntos medios de los

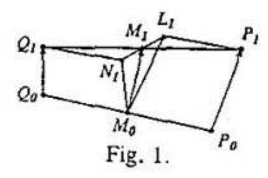


Fig. 1.

segmentos P_0Q_0 y P_1Q_1 es la mediana del triángulo $L_1M_0N_1$, donde L_1 y N_1 representan los cuartos vértices de los parale-logramos $P_1P_0M_0L_1$ y $Q_1Q_0M_0N_1$ (véase la fig. 1; en la construcción descrita, $P_1L_1Q_1N_1$ es un paralelogramo, y P_1Q_1 y N_1L_1, sus diagonales).

Ahora está claro, que si en lugar de y P_1 y Q_1 en las rectas Q_0Q_1 y P_0P_1 se toman los puntos P y Q, para los cuales $P_0P = tP_0P_1$ y $Q_0Q = tQ_0Q_1$ y, al igual que antes, se construye el triángulo LM_0N (con la

mediana M_0M), entonces éste se obtendrá por simple homotecia con el coeficiente t y el centro M_0 del triángulo $N_1M_1L_1$ (con la mediana M_0M_1), o sea, el punto M estará sobre la recta M_0M_1, y además $\overline{M_0M} = t\overline{M_0M_1}$).

1.28. Vamos a. aprovechar la fig. 1 de la solución de 1.25. Si los segmentos P_0P_1 y Q_0Q_1 giran uniformemente alrededor de los puntos P_0 y Q_0 a igual velocidad angular (una revolución por hora), entonces el triángulo $N_1M_0L_1$, junto con su mediana M_0, girará como un conjunto rígido alrededor del punto M_0 a la misma velocidad angular.

1.29. *Respuesta*: Una circunferencia. Vamos a traducir este problema al lenguaje del movimiento. Tracemos los radios O_1K y O_2L. Supongamos que la recta gira uniformemente a la velocidad angular ω. Entonces, según el teorema «sobre el anillo», los radios O_1K y O_2L girarán uniformemente a la misma velocidad angular 2ω, o sea, el valor del ángulo formado por los radios O_1K y O_2L, se mantendrá constante. Así pues, el problema se reduce al anterior.

2.11. b). Aproveche F.

2.19. *Respuesta*: Si h es la longitud de la altura del triángulo ABC, el conjunto buscado, siendo $\mu < h$, es vacío; siendo $\mu = h$, todo el triángulo (fig. 2), y siendo $\mu > h$ el contorno de un sexángulo (fig. 3).

2.20. b) Véase la fig. 4.

3.5, b) Este problema se reduce al 3.5, a), y también se resuelve fácilmente «saliendo al espacio»: si sobre las circunferencias dadas

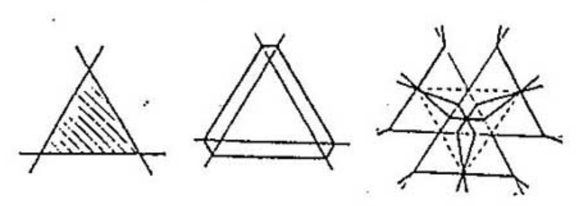


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

(en el plano horizontal α) se trazan tres esferas con los centros en este último y se miran desde arriba, veremos tres circunferencias, por las

que se cortan las esferas (sus proyecciones sobre el plano horizontal son nuestras tres cuerdas), y el punto de su intersección (su proyección es el punto buscado de intersección de las cuerdas).

3.7, b). Observemos que $\widehat{AMB} = 90° + \frac{\varphi}{2}$, donde M es centro de la circunferencia inscrita al triángulo. De acuerdo con E, el conjunto de puntos M es un par de arcos con extremos en A y B.

3.7, c). *Respuesta*: El conjunto de puntos buscado es un par de arcos (véanse las figs. 5, *a, b, c,* correspondientes a los casos: a) $\varphi < 90°$, b) $\varphi = 90°$, c) $\varphi > 90°$).

Supongamos que l_A y l_B son dos rectas que se cortan y pasan correspondientemente por los puntos A y B, que k_A y k_B, son rectas que pasan también por los puntos A y B; además, $k_A \perp l_B$, y $k_B \perp l_A$. Si las rectas l_A y l_B, giran alrededor de sus puntos A y B, también uniformemente lo harán las rectas k_A y k_B a la misma velocidad angular. De acuerdo con $E°$, el punto de intersección de las rectas k_A y k_B se mueve por una circunferencia.

Observemos que cuando el punto de intersección de las rectas l_A y l_B recorre el arco de la circunferencia γ, el punto de intersección de las

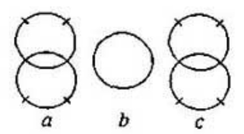


Fig. 5

rectas k_A y k_B recorre asimismo el arco de la circunferencia simétrica a la circunferencia γ respecto a la recta AB.

3.8, a) Sean a, b, c rectas que pasan por los puntos A, B, C correspondientemente; y K, L y M, respectivamente, los puntos de intersección de a y b, b y c, c y a. De acuerdo con el concepto $E°$ del alfabeto, el punto K recorre la circunferencia con la cuerda AB y el punto L, la circunferencia con la cuerda BC. Sea H el punto de intersección de estas circunferencias, diferente a B.

Cuando durante su rotación la recta b, (recta KL) pasa por el puntd H, los puntos K y L coinciden con M; por esto las rectas a y c pasarán también por el punto H. Los casos especiales, en que estas dos circunferencias son tangentes en el punto B o coinciden, hay que estudiarlos separadamente. En el primero de ellos el punto M coincide con B, y en el segundo, los puntos K, L y M coinciden todo el tiempo: «en todas las rectas a, b y c se puede insertar un anillo»).

Observemos, a propósito sea dicho, que durante esta rotación el triángulo KLM se mantiene semejante a sí mismo; cuando todas las rectas se cortan en el punto H, éste degenera a un punto, su tamaño mayor se logra cuando a, b, c son, respectivamente, perpendiculares a las rectas AH, BH y CH: en este momento sus vértices ocupan posiciones diametralmente opuestas al punto H en sus trayectorias (circunferencias).

3.8, b). Supongamos que las rectas AH, BH y CH han empezado a girar a una misma velocidad angular (H es el ortocentro del triángulo ABC) alrededor de los puntos A, B y C. Entonces, el punto de intersección de cada par de rectas describe una de las circunferencias acerca de las cuales se habla en el requisito.

3.9. Examinemos tres conjuntos de puntos M que están dentro del triángulo

$$\left\{M=\frac{S_{AMB}}{S_{BMC}}=k_1\right\},\ \left\{M=\frac{S_{BMC}}{S_{AMC}}=k_2\right\},\ \left\{M=\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}}=k_3\right\}.$$

Estos tres segmentos (véase I) se cortan en un mismo punto solamente en caso de que $k_1k_2k_3 = 1$.

3.10. Examine tres conjuntos:

$$\{M: |MA|^2-|MB|^2=h_1\},\ \{M: |MB|^2-|MC|^2=h_2\},$$
$$\{M: |MC|^2-|MA|^2=h_3\}.$$

Estas tres rectas (véase F) se cortan en un punto solamente en caso, de que $h_1 + h_2 + h_3 = 0$.

3.21. Trace el conjunto de extremos M de todos los vectores posibles

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} + \ldots + \overrightarrow{OE_n}$$

(donde $\overrightarrow{OE_i}$ son vectores unidades sobre los que se habla en el requisito), primero para $n = 1$, y luego, para $n = 2$, etc. (fig. 6).

4.4. *Respuesta*. La distancia menor entre los transeúntes es $du/\sqrt{u^2+v^2}$.

Supongamos que el primer transeúnte P marcha a la velocidad u, y el segundo, a la velocidad v (las longitudes de u y v de dichos vectores

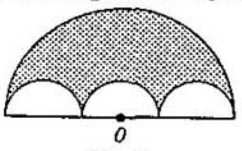


Fig. 6.

se conocen). Examinemos el movimiento relativo P en el sistema de cálculo relacionado con Q: será un movimiento uniforme a la velocidad constante $u - v$ (véase 1.3).

En la posición «inicial», cuando P se halla en el punto P_0 de intersección de los caminos, Q_0 se encuentra respecto a P a la distancia $|Q_0P_0| = d$ en dirección del vector $-\vec{v}$. De esta forma, para hallar la respuesta es suficiente trazar por el punto P_0, una recta l, paralela al vector $\vec{u} - \vec{v}$ (ésta será la trayectoria de P en el movimiento relativo en el sistema de cálculo relacionado con Q) y determinar la distancia $|Q_0H|$ desde el punto Q_0 hasta la recta l (H es la proyección de Q_0 sobre l). Por cuanto el triángulo Q_0P_0H es semejante al triángulo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ ($(Q_0P_0) \perp \vec{u}$, $(Q_0H) \perp (\vec{u} - \vec{v})$), entonces

$$|Q_0H|/|Q_0P_0| = |\vec{u}|/|\vec{u}-\vec{v}| = u/\sqrt{u^2 + v^2}$$

4.6. Del centro O_1 de una de las circunferencias tracemos la perpendicular O_1N a la secante l, que pasa por el punto A, y del centro O_2, de la segunda, otra perpendicular O_2M a la recta O_1N. Entonces, la longitud O_2M es la mitad de la distancia entre los puntos de intersección de la secante l con las circunferencias (diferentes de A).

4.9. *Respuesta*: Un triángulo isósceles. Aproveche 2.8a.

5.4. b). Demuestre que si un segmento KL, de longitud constante, se desliza con los extremos por los lados de cierto ángulo A, entonces el punto M de intersección de las perpendiculares elevadas desde los puntos K y L a los lados KA y LA del ángulo se mueve por la circunferencia con centro en A (recuerde el examen del teorema de Copérnico 0.3. en la introducción).

5.7. A construir estos puntos ayuda el hecho de que las líneas de nivel de la función $f\ (M)=|AM|/|MB|$ son ortogonales a las circunferencias que pasan por los puntos A y B. (pág. 102).

6.3. e). *Respuesta*: Una hipérbola, si las circunferencias están situadas una fuera de otra (pueden estar en contacto); la reunión de una hipérbola y una elipse si las circunferencias se cortan; una elipse si una circunferencia está situada dentro de la otra (pueden tocarse). Los focos de las curvas se hallan en los centros de las circunferencias dadas.

A aliviar el análisis de las posibles posiciones que ocupa la tercera circunferencia con relación a las dos primeras nos ayuda la siguiente regla general: dos circunferencias de radio r y R, cuyos centros distan d, tienen tangencia, siendo $r + R = d$ ó $|R - r| = d$.

6.12. a). Trazar una tangente simétrica a la dada respecto al centro de la elipse y las correspondientes perpendiculares a las dos desde los focos.

Aproveche 6.9, b) y el teorema que dice que el producto de los segmentos de la cuerda trazada por un punto dado dentro de la circunferencia no depende de la dirección de la cuerda.

6.15. Construya en el caso a) una elipse, en el caso b), una hipérbola con focos en A y B, que tenga tangencia con el primer elemento P_0P_1, y demuestre que el segundo elemento tendrá también tangencia. Para esto aproveche que $\Delta A'P_1B \cong \Delta AP_1B'$, donde A' es el punto simétrico a A con relación a P_0P_1, y B' es el punto simétrico a B respecto a P_1P_2. Las tangentes serán las mediatrices de los segmentos AA' y BB' [(6.9,a), (6.10, a)].

6.16, c). Tracemos un conjunto de puntos N para los cuales el punto medio del segmento AN se halla sobre la circunferencia dada: el

resultado es una circunferencia. Designemos su centro por B, y el radio, por R. El conjunto de puntos que están situados mas cerca del punto A que de cualquier punto N de la circunferencia trazada se puede representar como la intersección de semiplanos limitados por las mediatrices del segmento AN que contienen A. El mismo conjunto se puede escribir así:

$$\{M : |MA| - |MB| < R\},$$

o sea, que la curva que lo limita es una rama de la hipérbola.

6.17. Compare las indicaciones para 6.16 con la demostración de la propiedad focal de la parábola.

6.23. El origen de las coordenadas escójalo en el punto medio del segmento AB, y la dirección del eje Ox, de modo que en ciertos momentos de tiempo las dos rectas en rotación sean paralelas a Ox. Si se escriben las ecuaciones de las rectas en el momento t, se hallan las coordenadas de su punto de intersección y después se excluye el tiempo (como en la resolución 6.22), resulta la ecuación de la hipérbola de tipo (4) (pág. 131).

6.24. Imagínese dos rectas que giran alrededor de los puntos A y B en direcciones contrarias, de modo que la segunda tenga doble velocidad angular. No resulta difícil adivinar que el punto de su intersección se mueve por una curva parecida a la hipérbola, y que sus asíntotas forman ángulos de 60° con la recta AB, mientras que el punto de intersección C divide el segmento AB en la relación $|AC|/|BC| = 2$. En efecto, la respuesta a este problema es una rama de la hipérbola. La demostración geométrica lo más sencillo es darla reduciendo el problema al punto N del alfabeto. Para esto hay que trazar el punto M' simétrico a M con relación a la mediatriz l del segmento AB y observar que el rayo BM' es la bisectriz del ángulo ABM y $|MM'| = |MB|$. Por lo tanto $|MB|/p(M, l) = 2$.

6.25, a). Si escogemos el sistema de coordenadas de manera que los lados del ángulo se escriban con las ecuaciones $y = kx$ e $y = -kx$, $x > 0$, entonces el área del triángulo OPQ, donde P y Q están sobre los lados del ángulo y el punto medio del segmento PQ tiene las coordenadas $(x; y)$, es igual a $kx^2 - y^2/k$. b) Utilice el resultado del problema 1.7, b). c) Se deduce de a) y b).

7.2. Esta reunión se puede representar como el conjunto de puntos M para cada uno de los cuales se hallará un punto P de la circunferencia, tal que $|MP| < |PA|$, o como un conjunto de puntos M para los cuales la mediatriz del segmento MA tiene un punto común con la circunferencia dada. Compare este problema con 6.16 y 6.17.

7.9. *Respuesta*: a) 3; b) 4; c) 2,5. La relación entre las velocidades angulares puede hallarse como en los ejemplos de las págs. 161...165).

7.13, a) El arco de una circunferencia de radio R, con extremos en dos puntos de retroceso de la curva de Steiner (120°), tiene la misma longitud que la semicircunferencia de radio $2R/3$.

7.14, b) Ambas curvas pueden obtenerse como las trayectorias del vértice M de un paralelogramo articulado, las longitudes de cuyos lados son $R - r$ y r, mientras que la relación entre las velocidades angulares resulta $\omega_1/\omega_2 = -r/(R - r)$, (las velocidades angulares tienen signos opuestos, véase la pág. 161).

7.18. Aplique 7.7 y el teorema de Mozzi.

7.19. *Respuesta*: una k-cicloide (véase la pág. 154).

7.21. Haga uso de 7.13, a) y teoremas de Mozzi y de dos círculos.

7.23. Supongamos que M es un punto en la circunferencia inscrita que avanza sobre ésta a la velocidad angular ω. Entonces:

(1) los puntos M_1, M_2, y M_3, simétricos al punto M respecto a las rectas BC, CA y AB, se mueven por sus respectivas circunferencias (a velocidad angular $-\omega$).

(2) estas tres circunferencias se cortan en un mismo punto H, ortocentro) del triángulo ABC (3.8, b);

(3) cada recta M_iM ($i = 1, 2$ ó 3) gira a la velocidad angular ($-\omega/2$) alrededor de H;

(4) los tres puntos M_1, M_2, M_3 están sobre una recta l_M que pasa por H (o sea, las tres rectas M_iM son, en realidad, una misma recta l_M);

(5) los puntos medios de los segmentos M_iM ($i = 1, 2, 3$) y el punto medio K del segmento MH están sobre una recta, la de Simpson;

(6) el punto K se mueve por la circunferencia homotética a la circunscrita con el coeficiente 1/2, y cuyo centro de homotecia es H;

(7) la circunferencia γ pasa por nueve puntos sobre los cuales se habla en el punto b) del problema 7.23.

(8) la envolvente de las rectas l_M es la curva de Steiner tangente a la circunferencia.

Apéndice I

Método de coordenadas (fórmulas fundamentales)

En cuanto en el plano se ha elegido el sistema de coordenadas Oxy, a cada punto del plano se le pone en correspondencia un par de números: sus coordenadas. La correspondencia entre los puntos del plano y los pares de números es unívoca (a cada punto del plano le corresponde un par de números, y viceversa).

1. La distancia entre dos puntos $A\ (x_1;\ y_1)$ y $B\ (x_2;\ y_2)$ se determina según la fórmula

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_1 - y_2)^2}$$

2. El conjunto de puntos $(x;\ y)$, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (donde a, b y r son números dados, $r > 0$) es una circunferencia de radio r con centro en el punto $(a;\ b)$. En particular, $x^2 + y^2 = r^2$ es la ecuación de una circunferencia de radio r y cuyo centro es el origen del sistema de coordenadas.

3. El punto medio del segmento entre los puntos $A\ (x;\ y)$ y $B\ (x_2;\ y_2)$ tiene las coordenadas $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$. En general, el punto que divide el segmento AB en la relación $p : q$ (p y q son números positivos dados) tiene las coordenadas $\frac{qx_1 + px_2}{q + p}$, $\frac{qy_1 + py_2}{q + p}$. Estas fórmulas adquieren el aspecto más simple si p y q se eligen de modo que $q + p = 1$.

4. El conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $ax + by + c = 0$ (a, b, c son ciertos números; además a y b no son iguales a cero simultáneamente, o sea, $a^2 + b^2 \neq 0$), es una recta. A la inversa, cada recta se da según una ecuación de tipo $ax + by + c = 0$.

Los números a, b y c se determinan unívocamente para cada recta concreta con exactitud hasta la proporcionalidad: si se multiplican por el mismo número k ($k \neq 0$), entonces la ecuación obtenida $kax + kby + kc = 0$ determinará la misma recta.

Una recta divide el plano en dos semiplanos: el conjunto de puntos $(x; y)$, para los cuales $ax + by + c > 0$, y el conjunto de puntos $(x; y)$, para los cuales $ax + by + c < 0$.

5. La distancia $p(M, l)$ desde el punto $M(x_0; y_0)$ hasta la recta l, que se da mediante la ecuación $ax + by + c = 0$, se halla por la fórmula

$$p(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esta fórmula adquiere un aspecto particularmente simple siendo $a^2 + b^2 = 1$. Cualquier ecuación $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$ de una recta se puede reducir a esa fórmula, multiplicándola por uno de los números

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad ó \quad -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Apéndice II

Algunos datos de la planimetría escolar

I. Segmentos proporcionales

1. *Teorema sobre los segmentos proporcionales*. Si en una recta l_1 marcamos varios segmentos y por sus extremos trazamos rectas paralelas que corten otra recta l_2, aquéllas cortarán en la segunda segmentos proporcionales a los primeros.

2. Una recta paralela a un lado del triángulo y que corta los otros dos, conformará un triángulo semejante al dado.

3. *Teorema sobre la bisectriz del triángulo*. La bisectriz del ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales a los lados contiguos.

4. *Teorema sobre los segmentos proporcionales en el círculo*. Si dos cuerdas AB y CD de la circunferencia se cortan en el punto interior E, quedan divididas por dicho punto en dos segmentos cuyo producto es constante.

$|AE| \cdot |BE| = |DE| \cdot |CE|$

5. *Teorema sobre la tangente y la secante*. Si por un punto A, tomado fuera de la circunferencia, se traza la tangente AT y una secante que corte la circunferencia en los puntos C y B, entonces

$|AT|^2 = |AC| \cdot |AB|$

Observaciones:

1. El teorema sobre los segmentos proporcionales está formulado en el lenguaje del movimiento (pág. 27-28) como «teorema sobre el anillo en la recta». Una afirmación más general, deducida del teorema sobre el anillo, es el lema en la pág. 56.

3. El teorema sobre la bisectriz del triángulo está demostrado en el problema 2.5 (pág. 40) en forma mas general; para «la cruz de bisectrices» definida en el punto B del alfabeto (pág. 38).

5. El teorema sobre la tangente y la secante no figura directamente en el libro, pero está estrechamente relacionado con los problemas sobre el eje radical (pág. 46).

II. Distancias. Perpendiculares

1. La distancia desde el punto A hasta el pie de la perpendicular trazada por éste a una recta l, es menor que la distancia desde A hasta cualquier otro punto de la recta l.

2. La tangente a la circunferencia es perpendicular al radio trazado en el punto de tangencia.

3. De dos rectas oblicuas trazadas de cierto punto a una recta l, es mayor aquélla cuya proyección sobre dicha recta l resulta mayor.

4. a) Si un punto se halla sobre la mediatriz (perpendicular al punto medio) de un segmento, entonces equidista de sus extremos.

b) Si un punto equidista de los extremos de un segmento, entonces se halla sobre la mediatriz a éste.

Estos dos teoremas pueden ser formulados en una oración: el conjunto de todos los puntos, cada uno de los cuales equidista de los extremos de un segmento, es la mediatriz a este segmento.

5. a) Si un punto está sobre la bisectriz del ángulo, equidista de los lados de éste.

b) Si un punto de un ángulo, menor del desarrollado, equidista de sus lados, entonces se halla sobre la bisectriz de dicho ángulo.

De a) y b) se deduce que: el conjunto de todos los puntos de un ángulo, menor del desarrollado, equidistantes de sus lados, es la bisectriz de este ángulo.

6. En cualquier triángulo se puede inscribir una, y sólo una circunferencia.

7. Alrededor de un triángulo se puede circunscribir una, y sólo una circunferencia.

Observaciones:

1–2. Estas afirmaciones pueden servir de ilustración mas sencilla para el principio de tangencia, formulado en el § 5 (pág. 107). Sean la recta γ y el punto A. Tracemos la familia de circunferencias concéntricas: las líneas de nivel de la función $f(M) = |AM|$. El punto

de la recta γ en el que se logra el mínimo de la función f, es el punto de tangencia de una de las circunferencias de nuestra familia con la recta γ.

3–4. La oración general (4) es el punto A del alfabeto (pág. 38). La afirmación 3 figura, de hecho, en el texto del punto A sobre la partición en semiplanos.

5. Una afirmación más general se formula en el punto B del alfabeto, donde fue introducido el término «cruz de bisectrices» (pág. 38).

6. El centro de la circunferencia inscrita está definido en el problema 3.3 (pág. 65).

7. El centro de la circunferencia circunscrita está definido en el problema 3.1 (pág. 62).

III. Circunferencia

1. El radio perpendicular a la cuerda la divide en partes iguales.

2. *Teorema sobre las tangentes*. Si desde el punto A hay trazadas dos tangentes AT_1 y AT_2 a una circunferencia (T_1 y T_2 son los puntos de tangencia), entonces $|AT_1| = |AT_2|$

3. *Teorema sobre el cuadrilátero circunscrito*. En un cuadrilátero convexo se puede inscribir una circunferencia únicamente cuando la suma de las longitudes de dos de sus lados opuestos es igual a la de los otros dos.

4. El conjunto de todos los vértices de los triángulos rectángulos con la hipotenusa dada AB es una circunferencia de diámetro AB (sin los puntos A y B).

5. *Teorema del ángulo inscrito*. El valor en grados del ángulo inscrito es igual a la mitad del valor en grados del arco sobre el cual se apoya.

6. El ángulo formado por la tangente a una circunferencia y la cuerda que sale del punto de tangencia mide la mitad del valor en grados del arco situado dentro de este ángulo.

7. La medida de un ángulo cuyo vértice se encuentra dentro de un círculo es igual a la semisuma de los valores de los arcos, de los cuales uno está situado entre los lados de este ángulo, y el otro, entre las prolongaciones de los lados.

La medida de un ángulo formado por dos secantes que se cortan fuera del círculo es igual a la media de la diferencia de los arcos mayor y menor situados dentro del ángulo.

8. *Teorema sobre el cuadrilátero inscrito*. Alrededor de un cuadrilátero se puede circunscribir una circunferencia únicamente cuando la suma de los valores (en grados) de sus ángulos opuestos sea igual a 180°.

Observaciones:

4. Esta afirmación se examina en la pág. 14 en relación con el problema sobre el gato.

5. El teorema sobre el ángulo inscrito está formulado en el lenguaje del movimiento (pág. 27) como «teorema sobre el anillo en la circunferencia».

6–7. Con estos teoremas linda el problema 2.6.

IV. Triángulos

1. *Teorema sobre el ángulo externo*. Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.

2. *Teorema sobre las medianas*. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto que las divide en la relación 2:1, contando desde el vértice.

3. *Teorema sobre las alturas del triángulo*. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

4. *Teorema de Pitágoras*. La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.

5. Los lados del triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

6. El área del triángulo es igual a la mitad del producto:

a) de su base por su altura;

b) de dos de sus lados por el seno del ángulo entre éstos.

Observaciones:

2–3. Las demostraciones de estos teoremas están dadas en las págs. 63–66, en las resoluciones de los problemas 3.2 y 3.4 (el hecho de que una mediana divide a la otra en la relación 2 : 1 se puede deducir de la solución de 3.4).

Apéndice III

Una docena de tareas

Este apéndice está destinado a los lectores que, habiendo leído de corrida el libro y tratado de resolver los problemas que les han gustado, no han podido dilucidar algunos de estos, pero siguen deseando comprenderlos y están dispuestos a estudiar detalladamente el libro «con el lápiz en la mano».

Las doce tareas planteadas más abajo abarcan en sus diversos aspectos todo el contenido del libro y ponen de manifiesto los vínculos, ocultos a primera vista, entre los distintos problemas.

Las tareas se señalan como se acostumbra en la Escuela de Matemática por Correspondencia adjunta a la Universidad de Moscú. Al principio se explica el tema de la tarea y se enumeran las páginas del libro, los teoremas y los problemas que hay que examinar detalladamente; luego se ofrece la lista de los problemas de control. Los problemas «obligatorios» están separados con el signo ‖ de los suplementarios. Ciertos problemas vienen con sus explicaciones. En lo que se refiere a las soluciones, aconsejamos tratar de apuntarlas sucintamente, sin detalles excesivos, formulando claramente las principales etapas de la resolución y las referencias a los teoremas del curso de geometría. No hay que olvidar los casos particulares: a veces deben estudiarse aparte (como en el problema 1.1 el caso del punto M situado sobre la recta AC, o en el problema 1.3 el caso del cuadrado); aunque no instamos a los lectores a que sean excesivamente meticulosos en la revelación y el estudio detallado de todos los casos degenerados, les aconsejamos que cuiden de que los resultados se formulen, como acostumbran los matemáticos, exacta y ampliamente.

1. Nombre las letras

El objetivo de esta tarea es familiarizarse con el alfabeto y con los teoremas sobre los conjuntos de puntos, que más adelante resultarán útiles al resolver los problemas.

Revise el § 2 y escriba en una hoja aparte la lista de los puntos del alfabeto, desde A hasta J; al lado de cada letra escriba la fórmula (véase la pág. 60) y dibuje la figura correspondiente.

2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 1.16a), b), 5.4a), 1.11, 1.12 || 2.13, 2.15, 2.16, 3.6

Explicaciones

En los primeros cinco problemas se exige sencillamente dar las respuestas: nombrar la letra adecuada.

A resolver sin cálculos el problema 5.4a) ayudará el problema 1.16a).

En los problemas de «construcción» la tarea se reduce al trazamiento de cierto punto: el centro de la circunferencia, etc. El punto buscado se obtiene como la intersección de dos conjuntos del alfabeto (véase 1.4) Hay que nombrar estos conjuntos (puntos del alfabeto) y señalar cuántas respuestas tiene el problema.

La resolución breve de 2.13 está basada en el resultado de 2.12.

2. Transformaciones y construcciones

En las resoluciones de los problemas que constituyen esta tarea se emplean distintas transformaciones geométricas de la circunferencia y de la recta, acerca de las cuales se habla en las Págs. 29–32 y con las que hemos chocado más de una vez en el libro [6.9a), b), 7.1a), b)]

1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24a), b) || 3.7a), 4.8a)

Explicaciones:

1.22. Véase la resolución del problema 1.7a).

1.23. Véase la resolución del problema 1.6.

1.24a) Indique todas las respuestas.

3.7a) Emplee el hecho de que el centro de gravedad divide la mediana en la relación 2:1, contando desde el vértice.

4.8. Lea la resolución del problema 4.7.

En todos estos problemas aconsejamos hacer todas las construcciones necesarias. La resolución hay que escribirla

sucintamente, fijándose en qué conjuntos y transformaciones se emplean. Señale cuántas resoluciones tiene el problema,

3. Rectas que giran

Esta tarea está relacionada, por lo general, con diferentes variantes del teorema sobre el ángulo inscrito y sus corolarios.

Revise algunas páginas del libro en el siguiente orden: el problema 0.1 (sobre el gato), el problema 1.1, el teorema sobre el anillo en la circunferencia (págs. 26–27), los puntos E° y E del alfabeto (págs. 41–42). Observe que el teorema sobre el anillo (al igual que el teorema sobre el gato) no hay que interpretarlo al pie de la letra: el «anillo» imaginario es simplemente el punto de intersección de una recta y una circunferencia; si hacemos un modelo de alambre, entonces, después de dar una vuelta (a uno u otro lado), el anillo se estancará.

1.8, 1.9, 1.10, 1.13, 1.18, 2.6a), b) 1.27, 2.7, 2.8b), 4.6, 7.5, 7.6.

Explicaciones

1 9. Trace los dibujos para distintas posiciones del punto A.

1.10 Trace una recta por el punto B, construya el punto A', simétrico al punto A respecto a esta recta, y después trace el segmento BA'.

Represente los conjuntos, de puntos - las respuestas a los problemas 1.8 y 1.10 - en un dibujo. ¿Mediante qué transformación se puede obtener el conjunto 1.10 de 1.8?

1.13. Indique cuántas soluciones tiene el problema.

1.27. Haga un experimento con una escuadra común. Indicaciones para la posible resolución: describa alrededor de un triángulo de madera una circunferencia, una los vértices de los ángulos rectos y aplique el teorema del ángulo inscrito.

2.6. Imagínese que la cuerda móvil se mueve uniformemente por la circunferencia.

2.8b) La resolución es análoga a 2.8a). Reflexione sobre la segunda variante de la resolución de este problema, que se ofrece al final de la pág. 43.

4. Correlaciones directas y lineales

Esta tarea está relacionada con problemas en los cuales no figuran curvas, sino solamente rectas.

Revise algunas páginas del libro en el siguiente orden: los problemas 1.2 y 1.3 sobre «la bicicleta» y sobre el rectángulo (págs. 22–24); el teorema sobre el anillo en la recta (págs. 27 y 28) y el lema importante que le sigue (pág. 56); los puntos F, I, J del alfabeto, y los teoremas generales sobre las distancias hasta las rectas y los cuadrados de las distancias (págs; 44-58).

1.24a), b), 2.18, 2.19b), 3.9, 3.14, 3.15, 3.16 ‖ 1.26, 1.27, 2.14, 2.20a), 3.18.

Explicaciones

2.18. Véase las resoluciones 2.5 y 2.17.

2.19b). Hay que investigar cómo depende la respuesta de las dimensiones del rectángulo $a \times b$ y del parámetro (véase la respuesta al problema 2.19a)).

3.14–3.16. Véase el punto C del alfabeto.

1.27 Sean a y b las longitudes de los catetos del triángulo de madera. Determine la relación entre las distancias desde su vértice libre hasta los lados del ángulo recto dado.

2.20. Es suficiente dar la respuesta y el dibujo.

3.18. Lea la resolución 3.17.

5. El principio de tangencia (extremo convencional)

La tarea consta de problemas en los que es necesario hallar el máximo y el mínimo. En cada problema el asunto se puede reducir a que en cierta linea (como regla, uno de los conjuntos del alfabeto) hay que hallar el punto en el cual se alcanza el máximo y el mínimo de cierta función. Lea las resoluciones de los problemas 4.1, 4.2 y 4.7 (págs. 81–85), la resolución del problema 5.1, el texto restante del § 5, especialmente las págs. 106–109, y examine (o copie) los mapas de las lineas de nivel en las págs. 100–102.

4.3, 4.9, 5.4a), 5.5., 5.6a), b), 5.8 ‖ 4.8, 5.4b), 5.7.

Explicaciones

5.4a) Véase el problema 1.16a).

6. Particiones

En esta tarea se choca con diferentes conjuntos de puntos que satisfacen a condiciones en forma de desigualdades, así como con diferentes operaciones sobre los conjuntos (intersecciones, reuniones)

que corresponden a combinaciones lógicas de los requisitos. Muchos puntos del alfabeto § 2 tienen complementos de este tipo. Una línea que consta de los puntos M, donde $f(M) = a$, parte el plano en dos dominios: en uno $f(M) < a$, y en el otro $f(M) > a$. (aquí f es cierta función en el plano, véase la pág. 96). De idéntica manera, si f y g son dos funciones en el plano, el conjunto de puntos M, donde $f(M) = g(M)$, divide el plano en dominios: en unos, $f(M) > g(M)$, y en otros $f(M) < g(M)$. Analice el texto del § 3 (págs. 69-70) y la resolución de los problemas 3.11, 3.23 (sobre el queso) 1.19, 3.12, 3.14, 5.3a), b), 3.15, 3.16‖3.18, 3.19, 4.11, 4.12a), b).

Explicaciones

1.19. Trace el segmento BC y señale el conjunto de puntos de los vértices A del triángulo ABC, para los cuales se cumple cada una de las condiciones a), b), c); utilizando los segundos párrafos de los puntos D y E del alfabeto.

3.14. Lea la resolución 3.13.

3.15–3.16. Haga uso de C, y en el problema 3.16 acuérdese de 2.4.

3.18. En cada lado del polígono trace un rectángulo de altura S/p, dirigido hacia dentro. ¿Pueden tapar estos rectángulos todo el polígono?

4.11–4.12. Lea las resoluciones de 4.10.

7. Elipses, hipérbolas y parábolas

El objetivo de esta tarea es dar a conocer nuestras primeras definiciones de las curvas enumeradas en el título: los puntos del alfabeto K, L, M. Lea el § 6 y haga la lista del alfabeto: al lado de cada letra escriba la fórmula y trace el dibujo correspondiente (en esto le ayudarán los problemas 6.5a), b) de esta tarea.

6.1a). b), c), 6.2, 6.3a), b), c), d), 6.4a), b), 6.5a), b), 6.10a), b), 6.11a), b), ‖6.8, 6.12a), b), 6.13a), 6.14, 6.24.

Explicaciones

6.1a), b), c). Indique cómo la respuesta depende del parámetro (ponga $|AB| = 2c$).

6.2. Emplee el teorema referente a los segmentos de las tangentes a la circunferencia.

6.4b). Examine las posiciones de la quebrada $ABCD$, tales que el elemento BC corte a AD.

Los siguientes problemas se refieren a la propiedad focal de las curvas.

6.10a). La demostración se da empleando el esquema de la resolución 6.9a) y además se basa en el problema 6.7.

6.11a). El problema consiste en que hay que comparar la definición de la parábola (el punto M del alfabeto) y su propiedad focal.

6.8. La demostración es análoga a la demostración de la ortogonalidad de las elipses y de las hipérbolas confocales (pág. 119).

8. Envolventes. Reuniones Infinitas

En esta tarea todos los problemas son bastante difíciles. En cada uno se examina toda una familia de rectas o de circunferencias. Si tomamos una reunión de líneas de dicha familia, tendremos un dominio entero en el plano. A menudo ocurre que la frontera de este dominio es la envolvente de la familia: una curva (o recta) que tiene tangencia con todas las líneas de la misma. (Por ejemplo, en la resolución del problema 1.5, en la pág. 29, hemos utilizado el hecho de que la envolvente de una familia de cuerdas de igual longitud trazadas a la circunferencia dada, es otra circunferencia concéntrica a ésta). Le aconsejamos encarecidamente que para cada problema confeccione su dibujo. Pero no hace falta trazar las envolventes; si se traza suficientes líneas de la familia, las envolventes aparecen por sí mismas (lo mismo que en el dibujo en la pág. 125).

Lea las págs. 124–125. la pág. 18, las resoluciones 3.20b), 6.6, 6.7. y la demostración de la propiedad focal de la parábola (págs. 120–121).

3.20a), 3.22, 4.5, 6.16a), b), 6.17‖6.15a), 6.25a). b), 7.2, 7.20.

Explicaciones

3.20. Represente esta reunión como un conjunto de vértices M de un paralelogramo articulado $OPMQ$ con los lados 3 cm y 5 cm; compare este procedimiento con el del § 7 (págs. 143–156).

3.22. Si los primeros t minutos una persona iba por el camino, mientras que después, por el prado, ¿a dónde podía llegar? Ahora hay que tomar la reunión de los conjuntos obtenidos para todos los t, de 0 a 60.

4.5. ¿Qué conjunto será la respuesta al problema 3.22, si 1 hora la cambiamos por T horas? Aclare, con qué valor de T este conjunto contiene el punto B.

7.20. La familia de tangentes a la nefroide se ha examinado en el problema 7.16. Es necesario recordar también los problemas sobre la cardioide 7.1a), 7.2 y el teorema sobre los dos círculos (págs. 156–158).

9. Tangentes a las cicloides

Esta tarea incluye una serie de problemas en los cuales con respecto a cierta familia de rectas hay que demostrar que su envolvente es una curva cicloidal. Las resoluciones de la mayoría de ellos están basadas en el teorema sobre dos círculos. Lea la formulación y los ejemplos del empleo de dicho teorema en las págs. 156–159, y examine también su demostración (págs. 160–168).

7.17a), b), 7.16, 7.18, 7.19‖7.21, 7.22, 7.23.

Explicaciones

7.17. Aclare por qué curvas se mueven los extremos de los diámetros, y que curva les sirve de envolvente. (Compare el resultado con el último dibujo en la pág. 155).

7.16. Aplicando el teorema sobre los dos círculos, describa la familia de las tangentes a la nefroide. Lea la resolución del problema 7.15.

10. Ecuaciones de las curvas

El método de coordenadas permite formular los teoremas que en forma natural sintetizan una serie de observaciones geométricas particulares (revise los teoremas generales en el § 2, págs. 47–50, 57–58, § 6, págs. 127–136). La representación de las curvas en forma de ecuaciones permite resolver problemas geométricos en el lenguaje del álgebra. En esta tarea están reunidos los ejercicios relacionados con el método de coordenadas y los problemas en los que es muy natural emplearlo. La mayoría de los problemas se refieren a las curvas de segundo grado. En algunos es necesario pasar de las ecuaciones paramétricas a las algebraicas (véase la resolución del problema 0.2, págs. 14–15).

1.16c), 6.18, 6.19a), b), c), 6.20a), b), 7.24b) ‖ 6.21a), b), 6.23, 6.25a), 6.26a)', b), 6.27.

Explicaciones

En los problemas sobre las distancias hasta los puntos y las rectas se deberá examinar atentamente cómo el resultado depende del parámetro. Para cada uno de estos problemas hay que trazar el mapa correspondiente de la familia de curvas. Resulta cómodo trazar la elipse según la ecuación dada, imaginándosela como una circunferencia comprimida (pág. 129), mientras que la hipérbola, trazando sus asíntotas y marcando sus vértices (los puntos de la hipérbola más cercanos a su centro).

En el problema 6.26, si nos limitamos a los puntos M adentro del triángulo, se puede conseguir una bonita resolución geométrica, empleando la semejanza de los triángulos y los teoremas sobre el ángulo inscrito y el ángulo entre una tangente y una cuerda.

11. Prácticas de geometría

Esta tarea consiste en confeccionar dibujos que ilustren las propiedades y las definiciones más interesantes de las curvas. Esto permitirá revisar el libro desde un punto de vista nuevo.

Se pueden examinar los problemas en el espíritu del dicho conocido: «la geometría, es el arte de razonar correctamente sobre un dibujo incorrecto». Pero a veces tiene sentido enfocar la geometría con concepciones físicas: un dibujo exacto es un experimento geométrico que permite llegar a comprender cierta afirmación que se refiere a toda una familia de líneas o a una configuración embrollada, al advertir alguna regularidad nueva.

En general, aconsejamos repetir (a veces de modo más completo) aquellos dibujos que representan interesantes familias de rectas y circunferencias. El trazado de estas ilustraciones relativamente no es difícil, pero, de todas formas, para que resulten bonitas, hay que ser exacto e incluso revelar inventiva. En hojas grandes de papel, estos dibujos resultan más expresivos que nuestros pequeños planos en el margen de las páginas.

1. *La astroide* (pág. 18). Trate de que los puntos medios de los segmentos estén regularmente distribuidos por la circunferencia sobre la cual están situados. Cuando mayor sea la cantidad de segmentos dibujados, tanto mejor resultará su envolvente: la astroide.

2. *Familias ortogonales de circunferencias*, (pág. 102). La primera familia son todas las circunferencias posibles que pasan por los puntos A

y B (véase 2.1), y la segunda familia, las circunferencias cuyos centros están sobre la recta AB; si M es el centro de una de ellas, entonces su radio es el segmento de la tangente trazada desde el punto M a la circunferencia de diámetro AB.

3. *Elipses, hipérbolas y parábolas* (pág. 116). El método de construcción viene indicado en los problemas 6.5a), b). Pinte, de dos colores, de modo escaqueado, los cuadros obtenidos (véase la gallarda en la pág. 119 y la conclusión del problema (6.8). Haga un ejemplar mas de dibujos para los problemas 6.5a), b) y trace en ellos, con tinta, las familias de elipses, hipérbolas y parábolas.

4. *Curvas de segundo grado como envolventes de rectas* (págs. 125–126). El método de construcción se deduce de 6.16 y 6.17.

5. *Curvas que giran.* Haga independientemente el dibujo que ilustra el punto E° del alfabeto (el dibujo en la pág. 41). Construya una circunferencia y divídala en 12 partes iguales. Por los puntos de división trace rectas y por el punto A (uno de los puntos de división) una tangente a la circunferencia (obtendrá un haz de 12 rectas que dividen el plano en 24 ángulos iguales). Moviendo el lápiz por la circunferencia se puede convencer de que, cuando se pasa del punto M de división al siguiente, la recta AM, gira en un mismo ángulo. Escoja otro punto de división B (digamos, el cuarto desde A) y trace para él otro haz de rectas, como para el punto A. Marque para cada punto de división M el ángulo agudo entre las rectas AM y BM (todos estos ángulos son iguales).

Del teorema E° se deduce que si seguimos las 23 rectas hasta que se corten, entonces los 110 puntos de intersección obtenidos (sin contar los puntos A y B) están en 11 circunferencias, 10 en cada una (?).

Pinte en forma escaqueada los cuadros de la red obtenida. Entonces verá la familia de circunferencias que pasan por los puntos A y B y la familia de hipérbolas (conviene tomar haces no de 12 sino que de 24 rectas). En realidad, si las rectas que pasan por los puntos A y B giran en direcciones opuestas a igual velocidad angular, su punto de intersección se mueve por una hipérbola (6.23).

6. *La concoide de Nicomedes y los caracoles de Pascal* (págs. 141 y 151). La concoide de Nicomedes se obtiene de la manera siguiente. Sean una recta y un punto. Sobre las rectas que pasan por el punto dado se trazan, desde los puntos de su intersección con la recta dada, segmentos de longitud constante d en ambas direcciones. Dibuje la familia de semejantes concoides (con diferentes d).

Los caracoles de Pascal se obtienen de la misma forma. Sean una circunferencia y un punto sobre ésta. Sobre las rectas que pasan por el punto dado se trazan, desde los puntos de su intersección con la circunferencia, segmentos de longitud constante en ambas direcciones.

7. *La cardioide y la nefroide como envolventes de circunferencias* (pág. 146, 7.2 y pág. 168, 7.20).

8. *La cardioide y la nefroide como envolventes de rayos reflejados* (pág. 160). Estos dibujos es cómodo trazarlos aplicando el hecho de que la cuerda del rayo incidente tiene la misma longitud que la cuerda del rayo reflejado.

9. *Los transeúntes en rectas y en una circunferencia*. Repita el dibujo 3 de la pág. 125. Trace los dibujos de las curvas cicloidales (3–6 de la pág. 154–155), utilizando el problema 7.19, siendo $k = -3, -2, 2, 3$.

Explicaremos esto para el caso en que $k = -2$. Dividamos la circunferencia, digamos, en 24 partes iguales. Supongamos que el punto A de división es la situación inicial de los transeúntes P y Q y que ambos se mueven uniformemente por la circunferencia. Como $k = -2$, ellos van en distintas direcciones, y la velocidad de Q es dos veces mayor que la de P. Marcamos sus posiciones a iguales plazos de tiempo (cuando el punto P pasa el punto de división de turno) y las unimos con rectas PQ (cuando los transeúntes se sitúan en el mismo punto de división, trazamos la tangente a la circunferencia). La envolvente de estas rectas resulta la curva de Steiner.

12. Pequeñas investigaciones

Casi cada problema de geometría sirve de objeto para una pequeña investigación independiente, que exige imaginación y una manera de pensar original. En esta tarea hemos destacado cuatro problemas difíciles, para resolver los cuales se necesita emplear todo un complejo de diferentes consideraciones.

4.12a), 4.14a), b), 6.15a), b), 7.23a), b), c).

La solución del problema 4.14b) es bastante similar a la de la lancha motora. Para los dos últimos problemas hay indicaciones al final del libro. Para el último problema se pueden hacer bonitos dibujos, representando la familia de rectas de Simpson, de cierto triángulo (la envolvente es la curva de Steiner).

En 1980 la Editorial Mir publicará:

Kostovski A.

Construcciones geométricas mediante un solo compás

El autor del presente folleto, Doctor en Ciencias Fisico-matemáticas, A. Kostovski reiteradamente daba las lecciones dedicadas a la teoría de construcciones geométricas a los participantes de las olimpiadas matemáticas las que se organizan anualmente para los alumnos de escuelas secundarias en la ciudad de Lvov. Estas lecciones sirvieron de base para escribir el primer capítulo de la obra en cuestión. En el segundo capítulo se exponen las investigaciones del autor referentes a las construcciones geométricas que se realizan mediante un compás con abertura limitada de sus brazos.

Las construcciones geométricas es un factor esencial de estudios matemáticos; también éstas representan un instrumento potencial para las investigaciones geométricas. El folleto propuesto está escrito para amplios círculos de lectores.

